

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

**Математичне моделювання систем і процесів**

(частина III)

**Еліптичні функції**

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт для студентів спеціальності

8.05080102

«фізична та біомедична електроніка»

Київ – 2016

Навчальне видання

**Математичне моделювання систем і процесів**

(частина III)

**Еліптичні функції**

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт для студентів спеціальності 8.05080102

«фізична та біомедична електроніка»

Укладач

*Лошицький Павло Павлович*, проф.

Відповідальний редактор

*В.І.Тимофєєв*, проф.

Рецензенти

Професор кафедри електроніки

Національного авіаційного університету

д.фіз.-мат.наук, проф.

*Е.Г.Азнакаєв*

Доцент кафедри мікроелектроніки

Національного технічного університету України

«Київський політехнічний інститут»

к.т.н.

*Т.Л.Волхова*

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
1 РІВНЯННЯ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ.....	5
1.1 Приклади.....	9
1.1.1 Простий маятник .....	9
1.1.2. Осцилятор з нелінійною пружиною .....	13
2 ВЛАСТИВОСТІ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ.....	20
2.1 Обернення еліптичного інтеграла .....	25
2.2 Загальні властивості еліптичних функцій.....	30
2.3 Еліптичні функції Якобі.....	33
2.3.2 Властивості функцій Якобі (інший підхід).....	41
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....	56
Додаток А .....	58
А.1 .....	58
А.2 .....	69
Додаток Б.....	78

## ВСТУП

Методичні вказівки до виконання практичних робіт для магістрів, що вивчають курс «Математичне моделювання систем і процесів»

В практикумі подані розділи курсу «Еліптичні функції», що необхідні для розкриття змісту основних розділів курсу. Методичні вказівки складаються з наступних частин:

- короткі теоретичні відомості,
- приклади розв'язку,
- додаток— *конформне перетворення верхньої півплощини у многокутник.*

Метою даного практикуму є повторення та закріплення теоретичних знань, отриманих на лекціях, вивчення методів розв'язку диференціальних рівнянь, отримання навичок роботи з математичними моделями.

Під час розробки методичних вказівок використовувалась література:

## 1 РІВНЯННЯ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Можна вважати, що усі елементарні математичні функції виникли як розв'язки певних диференціальних рівнянь. Експоненціальна функція  $x = e^{at}$  з'являється при розв'язанні рівняння  $dx/dt = ax$ . Кругові тригонометричні функції  $x = \cos \omega t$  та  $x = \sin \omega t$  отримуються з рівняння  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ .

Гіперболічні функції  $x = \cosh \omega t$  та  $x = \sinh \omega t$  отримуються з рівняння

$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = 0$ . Усі ці рівняння — лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами. Функції, які вони визначають, приносять математиці велику користь, так як вони з'являються при розв'язанні широкого кола лінійних задач. Зважаючи на це, елементарні функції детально вивчені й усі їх особливості добре відомі. Чисельні значення їх протабульовані з високим ступенем точності.

Виявляється, що аналіз більш складних диференціальних рівнянь приводить до визначення нових функцій. Сферичні функції Лежандра  $P_n(x)$  та  $Q_n(x)$  служать розв'язками диференціального рівняння Лежандра:

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Функції Лагерра  $L_n(x)$  служать розв'язками диференціального рівняння:

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

Циліндричні функції  $Z_n(x)$  (функції Бесселя) визначаються як розв'язки диференціального рівняння Бесселя:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Ці функції складніші для використання та при їх табулюванні потрібна більша кількість параметрів. Серед більш складних спеціальних функцій еліптичні функції становлять особливий інтерес для вирішення задач, які виникають при дослідженні коливань фізичних систем.

До диференціального рівняння виду

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \sum_{n=0}^p a_n x^n \quad (1.1)$$

приводять багато цікавих задач. Для степенів  $p$  вище 2, так що  $0 \leq p \leq 2$ , можна показати, що рішення завжди може бути отримане за допомогою елементарних функцій. Вигляд рішення може бути складним, але воно може бути записаним лиш в елементарних функціях. Для степеней 3 та 4, тобто при  $3 \leq p \leq 4$ , рішення може бути знайдене за допомогою спеціальних функцій, відомих як *еліптичні*. Для степені вище 4, тобто при  $p \geq 5$ , необхідні більш складні функції, так звані *гіпереліптичні*.

Зіставимо між собою визначення трьох синусів:  $y = \sin(t)$  (круговий синус) – функція, обернена  $\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$ , визначена в інтервалі  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  де

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}};$$

$y = sh(t)$  (гіперболічний синус) – функція, обернена  $\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}$ , визначена

на всій числовій вісі ;  $y = sl(t)$  (лемніскатичний синус) – функція обернена

$$\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^4}}, \quad \text{визначена в інтервалі } \left(-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}\right), \quad \text{де } \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^4}}.$$

Очевидно, що усі ці випадки будуть охоплені, якщо вдасться вивчити функцію  $y = s(t)$ , обернену по відношенню до інтегралу виду

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + k(1 + a^2 x^2)x = 0 \quad t = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{1 + m\eta^2 + n\eta^4}}, \quad (1.2)$$

де  $m$  і  $n$  – деякі дійсні числа. Таку функцію будемо називати узагальненим синусом.

При  $m = -1$  і  $n = 0$  отримуємо круговий синус,

при  $m = 1$  і  $n = 0$  – гіперболічний синус,

при  $m = 0$  і  $n = -1$  – лемніскатичний синус.

Якщо  $m = -(1 + k^2)$ ,  $n = k^2$ , де  $0 < k < 1$ , то многочлен  $1 + m\eta^2 + n\eta^4$  перетворюється в  $(1 - \eta^2)(1 - k^2\eta^4)$ . В цьому випадку функція  $s(t)$  дає еліптичну функцію Якобі з модулем  $k$ ; вона називається синусом амплітуди і позначається так:  $sn(t, k)$  або, коротше,  $sn(t)$ .

Дамо короткий опис еліптичних функцій. Властивості цих функцій вивчені і таблиці їх числових значень доступні для використання. Ці таблиці складені відповідно до стандартної форми диференціального рівняння і його розв'язків. В них приведені значення так званих еліптичних інтегралів трьох родів.

Загальний еліптичний інтеграл (нормальна форма Лежандра) допускає приведення до наступних трьох нормальних форм ( $0 < k^2 < 1$ ,  $x = \sin \varphi$ ):

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = F(k, \varphi);$$

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{(1-t^2)}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} d\psi = E(k, \varphi);$$

$$\int_0^x \frac{dt}{(t^2 - a^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Вони називаються неповними еліптичними інтегралами 1-го, 2-го та 3-го роду.

Інтеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = F(k, \frac{\pi}{2}) = K(k)$$

називається повним еліптичним інтегралом 1-го роду.

На рис. 1.1 зображені  $F(k, \varphi)$  та  $E(k, \varphi)$  як функції від  $\varphi$  для різних значень  $k = \sin \theta$ .

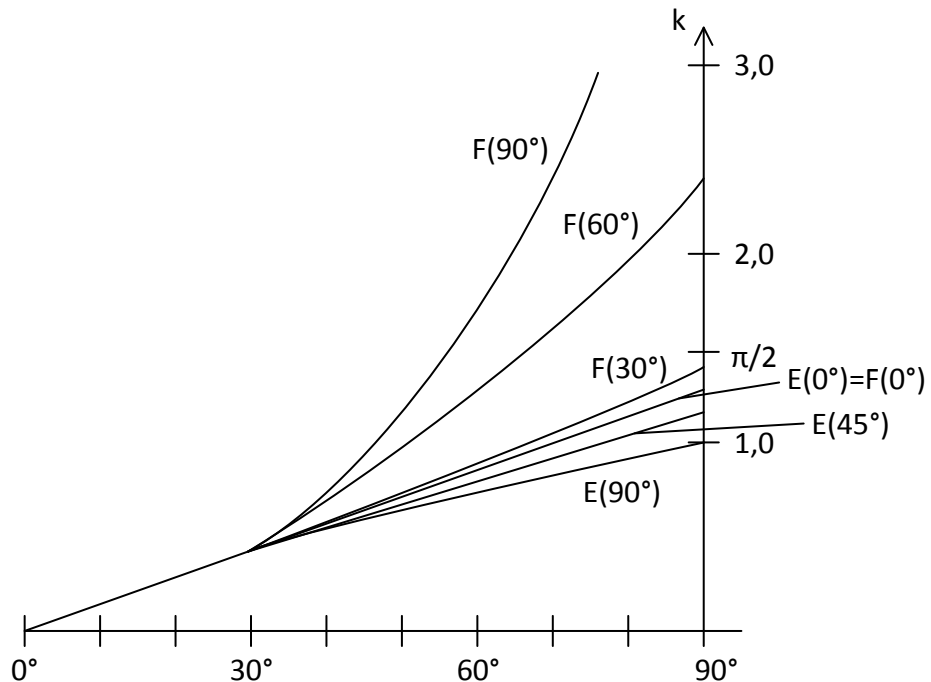


Рисунок 1.1 – Еліптичні інтеграли 1-го та 2-го роду

Будемо розглядати лише еліптичний інтеграл першого роду. Він зазвичай записується в наступній стандартній формі:

$$u = F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

де  $k$  і  $\varphi$  - параметри, які визначають для значення інтеграла, причому змінення величини  $k$  обмежено інтегралом  $0 \leq k \leq 1$ . Параметр  $k$  називається модулем  $u$ , а  $\varphi$  - амплітудою  $u$ , так що в символічній формі запису  $k = \text{mod } u$  і  $\varphi = \text{am } u$ . Таблиці для  $u = F(k, \varphi)$  даються по параметрам  $k$  і  $\varphi$ . Іноді



$k$  замінюється параметром  $\alpha$  так, що  $k = \sin \alpha$ , в результаті чого обидва параметри можуть розглядатися як кути. Одне з ускладнень, що можуть виникнути при роботі з рівняннями, розв'язання яких виражається в еліптичних функціях, складається в тому, щоб перетворити запропоноване рівняння в стандартну форму, для того щоб мати можливість скористатися існуючими таблицями.

Еліптичні функції представляють собою зворотні функції або алгебраїчні функції від зворотних функцій для еліптичних інтегралів. Вони є двояко періодичними функціями свого комплексного аргументу  $z$  і мають два комплексних періоди  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , так що  $f(r) = f(x + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ , де  $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . В кінцевій площині вони не мають суттєвих особливостей. Функції, обернені до функції

$$z = F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (0 < k^2 < 1),$$

називається **амплітудою**  $z$

$$\varphi = am \ z$$

якщо ввести  $x = \sin \varphi$  то

$$z = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

і  $x = \sin(am \ z) \equiv sn \ z$  (sinus amplitudinis)

$$\sqrt{1-x^2} = \cos(am \ z) \equiv cn \ z \text{ (cosinus amplitudinis)}$$

$$\sqrt{1-k^2x^2} = \Delta \ am \ z \equiv dn \ z \text{ (delta amplitudinis)}$$

Функції  $sn$ ,  $cn$ ,  $dn$  - еліптичні функції Якобі.

## 1.1 Приклади

### 1.1.1 Простий маятник

Найбільш тривіальним шляхом використання еліптичних функцій в механіці і техніці, є введення цих функцій для інтегрування диференціального рівняння або обчислення інтеграла. Розглянемо завдання про коливання простого маятника як типовий приклад подібного роду використання.

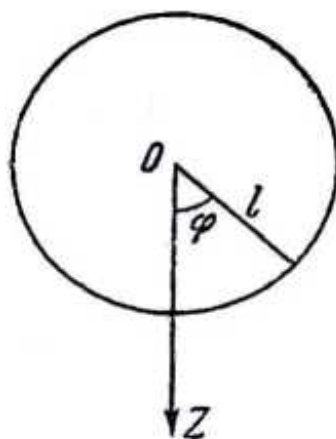


Рисунок 1.2 – Простий маятник

Прийmemo за початок координат точку підвісу маятника і направимо вісь  $Z$  вертикально вниз (рис. 1.2). Нехай довжина підвісу маятника дорівнює  $l$ , початкове положення маятника є найнижче його положення ( $z = l$ ). Швидкість маятника назвемо  $v$ , а в початковий момент -  $v_0 > 0$ . Позначаючи ще через  $g$  прискорення сили тяжіння, матимемо інтеграл живих сил:

$$\frac{v^2}{2} - g \cdot z = -g\alpha. \quad (1.3)$$

Так як  $v = v_0$  при  $z = l$ , то константа  $\alpha$  дорівнює:

$$\alpha = l - \frac{v_0^2}{2 \cdot g}.$$

В якості невідомої функції введемо замість  $z$  кут  $\varphi$  між віссю  $Z$  та підвісом маятника. Тоді:

$$z = l \cdot \cos \varphi \rightarrow v = l \frac{d\varphi}{dt}.$$

Отже, рівняння живих сил буде мати вигляд:

$$\frac{l^2}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - g \cdot l \cdot \cos \varphi = -g\alpha,$$

звідки можна вивести t:

$$t = \frac{l}{\sqrt{2 \cdot g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{l \cdot \cos \psi - \alpha}}. \quad (1.4)$$

Будемо розрізняти три випадки, залежно від того, чи буде константа  $\alpha$  більша, рівна або менша за  $l$ .

*Перший випадок:*  $\alpha > l$ . Цей випадок має місце, якщо  $v_0 < 2\sqrt{g \cdot l}$ , тобто якщо початкова швидкість  $v_0$  не «дуже» велика. Введемо кут  $\beta$  ( $0 < \beta < \pi$ ) за допомогою співвідношення:

$$\alpha = l \cdot \cos \beta.$$

Тоді рівняння (1.4) буде мати вигляд:

$$t = \sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos \psi - \cos \beta}} \rightarrow t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2}}}.$$

Нехай  $k^2 = \sin^2 \frac{\beta}{2}$ ;  $\sin \frac{\psi}{2} = x \cdot \sin \frac{\beta}{2}$ ;  $\sin \frac{\varphi}{2} = u \cdot \sin \frac{\beta}{2}$ , вираз прийме

вигляд:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2 \cdot x^2)}},$$

звідки можна визначити  $u$ :

$$u = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t; k\right).$$

$$\text{Отже, } \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t; \sin \frac{\beta}{2}\right).$$

Ця формула виражає закон руху маятника і дозволяє легко углядіти всі особливості цього руху. По-перше, рух є періодичним і період дорівнює  $4\sqrt{l/g} \cdot K$ . По-друге, займаючи при  $t=0$  найнижче положення, маятник після чверті періоду буде займати найвище положення ( $\varphi=\beta$ ). Після ще однієї чверті періоду він знову буде займати найнижче положення. Нарешті, по закінченні подальшої чверті періоду маятник буде займати найвище положення з іншого боку від вертикальної осі ( $\varphi=-\beta$ ). По-третє, в найвищому положенні швидкість маятника дорівнює нулю.

*Другий випадок:*  $\alpha=-l$ . Цей випадок є граничним для попереднього і настає при  $v_0 = 2\sqrt{g \cdot l}$ . Так як тепер  $\beta = \pi$ , то ми будемо мати рівняння:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = u \rightarrow t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^u \frac{dx}{1-x^2}.$$

Проінтегрувавши, отримаємо вираз:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{1+u}{1-u}.$$

$$\text{Отже, } \sin \frac{\varphi}{2} = \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right).$$

Ця формула показує, що при збільшенні від 0 до  $\infty$  кут  $\varphi$  буде монотонно збільшуватися від 0 до  $\pi$ , тобто маятник буде рухатися весь час в одному напрямку його граничним положенням буде найвище положення, якого він ніколи не досягне,.

*Третій випадок:*  $\alpha < -l$ . У цьому випадку, який відбудеться при  $v_0 > 2\sqrt{g \cdot l}$ , рівняння (1.4) перепишемо у вигляді:

$$t = \frac{l}{\sqrt{2 \cdot g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{l \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\psi}{2}) - \alpha}}. \quad (1.5)$$

Нехай  $k^2 = \frac{2 \cdot l}{l - \alpha}$ , так що  $0 < k^2 < 1$ , та  $\sin \frac{\psi}{2} = x$ ;  $\sin \frac{\varphi}{2} = u$ .

Тоді (1.5) прийме вигляд:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{l - \alpha}} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2) \cdot (1 - k^2 \cdot x^2)}},$$

звідки можна визначити  $u$ :

$$u = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{l - \alpha}{2 \cdot l}} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t; k\right).$$

$$\text{Отже, } \sin \frac{\varphi}{2} = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{l - \alpha}{2 \cdot l}} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t; \sqrt{\frac{2 \cdot l}{l - \alpha}}\right).$$

Ця формула показує, що маятник досягне найвищого положення  $z = -l$  при  $t = \frac{\sqrt{2 \cdot l}}{\sqrt{g \cdot (l - \alpha)}} \cdot K$ . Однак у цьому положенні його швидкість буде відмінна від нуля. Взагалі швидкість ніколи не стане нульовою, так як це могло б статися, як показує рівняння (1.3), лише при  $z = \alpha$ , але  $\alpha < -l$ , а  $z$  весь час лежить в інтервалі  $[-l, l]$ . Таким чином, замість коливального руху тепер відбуватиметься рух по колу весь час в одному напрямку.

### 1.1.2. Осцилятор з нелінійною пружиною

Конкретним фізичним прикладом, який приводить до розв'язання в еліптичних функціях, служить наступна механічна система. Постійна маса закріплена на вільному кінці пружини, другий кінець якої закріплений нерухомо. Вважається, що сили тертя в системі відсутні, і якщо масу вивести із положення рівноваги, а потім надати самій собі, вона почне коливальні рухи. Найпростішим можливим випадком є той, коли між деформацією пружини і силою, необхідною для того, щоб призвести до деформації, існує

лінійна залежність. Диференціальним рівнянням такої системи служить лінійне рівняння, а рух являє собою прості гармонічні коливання.

Реальні пружини частіше за все не настільки прості, деформація і сила рідко пропорційні одна одній. Зазвичай з ростом переміщення сила збільшується швидше, ніж при лінійній залежності від переміщення. Таку пружину називають «жорсткою» пружиною. Можливо також виготовити пружину, для якої сила збільшується менш швидко, ніж лінійна функція переміщення. Пружини такого виду називають «м'якими». Еквівалентна жорсткість для першої пружини з ростом деформації зростає, тоді як для другої вона зменшується. При цьому розуміють, що пружина має однаковий опір для рівних по величині відхилень як в одному, так і в іншому напрямку від положення рівноваги. Звісно ж це припущення для реальних пружин найчастіше не виконується. В будь-якому випадку диференціальне рівняння системи стає нелінійним і її рух вже не може бути просто гармонійним.

Рівняння, яке описує симетричну жорстку пружину, можна представити у вигляді:

$$F_{np} = k(1 + a^2 x^2)x,$$

де  $F_{np}$  – сила пружності;

$k$  і  $a^2$  – додатні сталі.

Якщо  $a^2 = 0$ , то пружина лінійна; її відновлююча сила рівна  $kx$ , причому множник  $k$ , який називають жорсткістю пружини, для даного випадку постійний. Якщо  $a^2 > 0$ , то пружина жорстка, причому її еквівалентна жорсткість зростає з ростом відхилення (незалежно від знаку). Рівняння, яке описує м'яку пружину, аналогічне:

$$F_{np} = k(1 - b^2 x^2)x,$$

де  $F_{np}$  – сила пружності;

$k$  і  $b^2$  – додатні сталі.

Дане рівняння відповідає реальній пружині лише при не дуже великих відхиленнях. Його особливість у тому, що коли  $x$  за абсолютною величиною

переверщує  $1/b^2$ , знак сили змінюється. В цьому випадку пружина прагне збільшити деформацію, а не повернутися до своїх початкових розмірів. Хоча така поведінка не характерна для спіральної дрітної пружини, вона може зустрітися в таких явищах, як, наприклад, неоднорідне магнітне поле, яке діє багато чим подібно пружині. Такий же характер має пружина, еквівалентна звичайному маятнику.

Якщо постійна маса  $M$  утримується жорсткою пружиною, то система описується рівнянням

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + k(1 + a^2 x^2)x = 0.$$

Рівняння цього виду може бути проінтегроване, якщо обидві його частини помножити на  $2\left(\frac{dx}{dt}\right)dt = 2dx$ .

В той же час зручно ввести скорочене позначення  $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ , так що

$$\int 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)dt = -2\omega_0^2 \int (1 + a^2 x^2)x dx$$

і

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\omega_0^2 \left(x^2 + \frac{a^2 x^4}{2} - C_1^2\right), \quad (1.6)$$

де  $C_1^2$  – постійна інтегрування.

Це рівняння виду (1.1). Зважаючи на це слід чекати, що рішення буде містити еліптичну функцію.

Якщо пружина лінійна, то  $a^2 = 0$ , і система описується рівнянням

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\omega_0^2 (x^2 - C_1^2),$$

яке може бути вирішене в еквівалентних функціях. Дійсно, беручи квадратний корінь від обох частин рівняння і інтегруючи після розділу змінних, отримаємо:

$$\int \frac{dx}{\omega_0 (C_1^2 - x^2)^{1/2}} = \int dt + C_2$$

$$\arcsin \frac{x}{C_1} = \omega_0 (t + C_2)$$

$$\frac{x}{C_1} = \sin \omega_0 (t + C_2)$$

звідки

$$x = C_1 \sin \omega_0 (t + C_2),$$

де  $C_2$  – друга постійна інтегрування.

Звичайно, для цього лінійного випадку розв'язок можна записати одразу, оминувши проміжні етапи.

Для подальшого дослідження системи з жорсткою пружиною потрібно задати початкові умови і визначити постійну інтегрування. Із спостережень за системами без тертя, які включають в себе масу та пружину, відомо, що система буде здійснювати періодичні коливання. В кожному циклі коливань відхилення двічі досягає максимуму і швидкість стає рівною нулю. Якщо

максимальне відхилення позначити як  $A$ , необхідною умовою буде  $\frac{dx}{dt} = 0$

при  $x = A$ . Ця умова в застосуванні до рівняння (1.6) визначає постійну

$C_1^2 = A^2 + \frac{a^2 A^4}{2}$ . Таким чином, рівняння (1.6) прийме вигляд

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \omega_0^2 \left[ (A^2 - x^2) + \frac{a^2}{2} (A^4 - x^4) \right]$$

Беручи квадратний корінь із обох частин рівняння, розділяючи змінні і інтегруючи, отримаємо:

$$\int \omega_0 dt = \pm \int \frac{dx}{\left[ (A^2 - x^2) + \frac{a^2}{2} (A^4 - x^4) \right]^{1/2}} \quad (1.7)$$



Друга початкова умова необхідна для того щоб визначити границі інтегрування, або для того, щоб виключити адитивну постійну. Далі, як вже вказувалося, в цьому випадку ми повинні отримати еліптичний інтеграл, і бажано звести цей інтеграл до стандартної форми. Невелике дослідження показує, що вибір початку відліку часу ( $t=0$ ) в момент найбільшого відхилення приводить до стандартного еліптичного інтегралу. З ростом часу відхилення зменшується в сторону від'ємних значень. Внаслідок цього перед інтегралом, який стоїть в правій частині (1.7), слід вибрати знак мінус. В будь-який момент часу  $t$  відповідне відхилення дорівнює  $x$  і рівняння (1.7) приймає вигляд:

$$\int_{t=0}^t \omega_0 dt = \omega_0 t = \int_{x=A}^{x=x} \frac{dx}{\left[ (A^2 - x^2) + \left( \frac{a^2}{2} \right) (A^4 - x^4) \right]^{1/2}} \quad (1.8)$$

Стандартний еліптичний інтеграл виходить після деяких перетворень і заміни змінної. Знаменник підінтегрального виразу можна записати у формі:

$$(A^2 - x^2) + \left( \frac{a^2}{2} \right) (A^4 - x^4) = -\frac{a^2}{2} \left( x^2 + \frac{2}{a^2} + A^2 \right) (x^2 - A^2) \quad (1.9)$$

Для лінійного осцилятора при заданих початкових умовах розв'язок виразиться косинусоїдальною функцією часу. Для нелінійної системи, коливання якої до певного ступеня схожі на косинусоїду, доцільно ввести нову змінну  $\varphi$  по формулі

$$x = A \cos \varphi \quad (1.10)$$

Ця рівність визначає кут  $\varphi$ , залежність якого від часу підлягає визначенню.

Після підстановки виразів (1.9) і (1.10) в рівняння (1.8) отримаємо:

$$\omega_0 t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left[ \left( \frac{a^2}{2} \right) \left( A^2 + \frac{2}{a^2} + A^2 \cos^2 \varphi \right) \right]^{1/2}} \quad (1.11)$$

Перетворимо знаменник

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} \left( A^2 + \frac{2}{a^2} + A^2 \cos^2 \varphi \right) &= \frac{a^2}{2} \cdot A^2 \left[ 1 + \frac{2}{a^2 A^2} \cos^2 \varphi \right] = \frac{A^2 a^2}{2} \left[ 1 + \frac{2}{a^2 A^2} + 1 - \sin^2 \varphi \right] = \\ &= A^2 a^2 \left[ 1 + \frac{1}{a^2 A^2} - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right] = A^2 a^2 + 1 - \frac{A^2 a^2}{2} \sin^2 \varphi = \\ &= (1 + a^2 A^2) \left[ 1 - \frac{A^2 a^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + A^2 a^2} \sin^2 \varphi \right] = (1 + a^2 A^2) [1 - k^2 \sin^2 \varphi] \end{aligned}$$

Нарешті, визначимо величину  $k$  рівністю

$$k^2 = \frac{A^2 a^2}{2(1 + A^2 a^2)} = \left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{a^2 A^2} \right) \right]^{-1}, \quad (1.12)$$

що дає:

$$\omega_0 t = (1 + a^2 A^2)^{1/2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}.$$

Інтеграл в цьому виразі відповідає стандартній формі еліптичного інтеграла першого роду, так що рішення можна записати у формі:

$$\omega_0 t = (1 + a^2 A^2)^{1/2} F(k, \varphi) = (1 + a^2 A^2)^{1/2} u \quad (1.13)$$

Модуль еліптичного інтегралу  $k$  визначається в залежності від максимального відхилення згідно (1.12). Кут  $\varphi$  зв'язує значення миттєвого відхилення з максимальним згідно (1.10). Інтеграл дає залежність між миттєвими значеннями відхилень і часом. Поточне значення відхилень може бути виражене як:

$$x = A \cos \varphi = A \cos(am\ u) = A\ cn\ u \quad (1.14)$$

Цей вираз визначає еліптичний косинус  $cn\ u$  від інтеграла  $u$ . Функція  $cn\ u$  – еліптична функцією Якобі.

На цьому етапі зручно зупинитися і коротко розглянути аналогічний випадок, коли постійна маса може без опору переміщуватись під дією м'якої пружини. Рівняння системи має вигляд:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + k(1 - b^2 x^2)x = 0.$$

Нагадаємо, що рівняння осцилятора Дюффінга

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x - \varepsilon x^3 = 0.$$

Дослідження цього рівняння проводиться в основному тим же шляхом, що і рівняння системи з жорсткою пружиною. Наново отриманий еліптичний інтеграл, який при підходящому виборі початкових умов може бути приведений до стандартної форми. З цією метою слід обрати початкові умови  $\frac{dx}{dt} = 0$ , при  $x = A$  і  $t = 0$  (останнє відрізняється від аналогічної умови для жорсткої пружини). В лінійній системі такі умови призвели б до синусоїдальних відхилень. Тому доцільно кут  $\varphi$  визначити в цьому випадку рішуче:

$$x = A \sin \varphi \quad (1.15)$$

Аналогічно модуль  $k$  слід визначити як

$$k^2 = \left( \frac{2}{b^2 A^2} - 1 \right)^{-1} \quad (1.16)$$

Кінцева формула яка зв'язує  $\varphi$  і  $t$ , в цьому випадку має вигляд

$$\omega_0 t = \left( 1 - \frac{b^2 A^2}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} F(k, \varphi) = \left( 1 - \frac{b^2 A^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} u \quad (1.16a)$$

Поточне значення відхилень  $x$  визначається за формулою

$$x = A \sin \varphi = A \sin(am\ u) = A\ sn\ u \quad (1.17)$$

Цей вираз визначає еліптичний синус  $sn\ u$ .

## 2 ВЛАСТИВОСТІ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Ряд загальних властивостей еліптичного інтегралу і зв'язаних з ним функцій підлягає дослідженню. Числове значення інтегралу залежить від двох параметрів:  $k$  і  $\varphi$ , значення яких повинні бути відомі. Для того, щоб обчислити інтеграл, підінтегральний вираз можна розкласти в біноміальний ряд і проінтегрувати ряд почленно:

$$u = \int_0^\varphi \left( 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} k^4 \sin^4 \varphi + \frac{5}{16} k^6 \sin^6 \varphi + \dots \right) d\varphi.$$

В дійсності, можна знайти інші ряди, які сходяться швидше цього ряду і більш зручні для обчислення.

Коли  $\varphi$  приймає значення  $\pi/2$ , інтеграл називають повним еліптичним інтегралом і позначають символом  $K(k)$ :

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = K(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots \right).$$

Числові значення цих інтегралів підраховані і протабульовані. Графік, побудований за табличними значеннями, представлений на рис. 2.1 для крайніх значень  $k=0$  і  $k=1$ , а також для одного проміжного  $k^2=0,75$ . Зазвичай таблиці еліптичних інтегралів складаються лише для інтервалу  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Межі використання таблиць можуть бути розширені, якщо врахувати властивість інтегралу:

$$F(k, \varphi) = -F(k, -\varphi);$$

$$F(k, \varphi + n\pi) = 2nK(k) + F(k, \varphi),$$

де  $n=0,1,2,\dots$

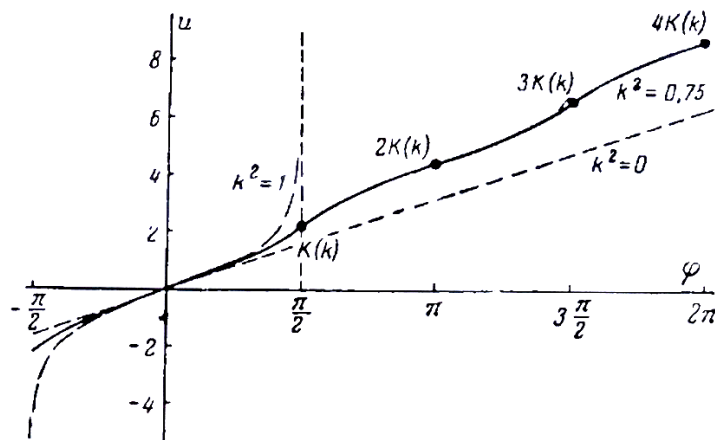


Рисунок 2.1 – Зміна еліптичного інтегралу першого роду  $u$  в функції його амплітуди  $\varphi$  для трьох різних значень модуля  $k$

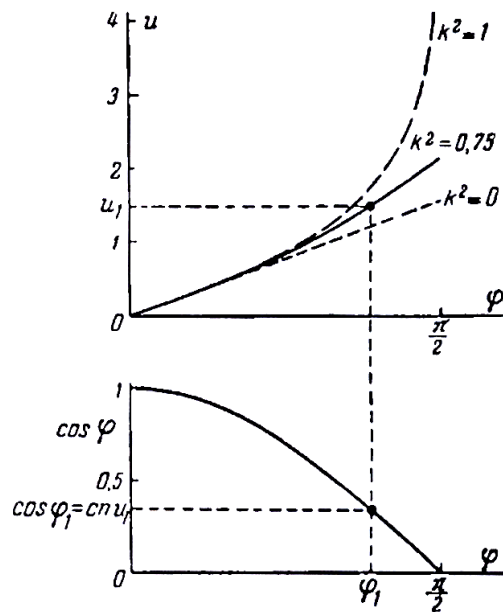


Рисунок 2.2 – Графічний метод визначення еліптичного косинуса. Графіки еліптичного інтегралу (зверху) і кругового косинуса (знизу) побудовані в залежності від аргументу  $\varphi$

Якщо значення еліптичного інтегралу відомі, еліптичні функції  $\operatorname{sn} u$  і  $\operatorname{cn} u$  можуть бути знайдені із визначаючих формул (1.14) і (1.17). Застосування формул ілюструється на рис. 2.2, із якого видно, яким чином

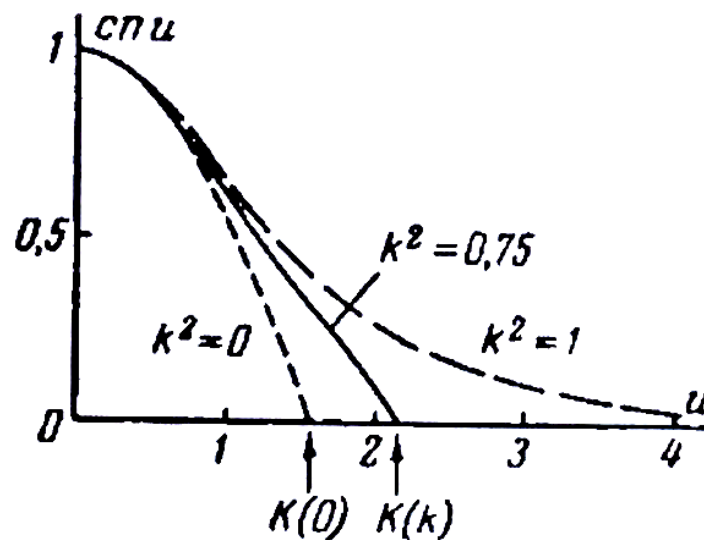


Рисунок 2.3 – Графіки першої чверті повного циклу зміни функції еліптичного косинуса для різних значень модуля  $k$

конкретне значення  $\varphi_1$  визначає значення інтегралу  $u_1$  і одночасно значення еліптичного косинуса  $\operatorname{cn} u_1 = \cos \varphi_1$ . Зважаючи на те, що величина  $u_1$  залежить від модуля  $k$ , значення  $\operatorname{cn} u_1$  також залежить від  $k$ . При  $k = 0$  еліптичний косинус співпадає з круговим косинусом; з ростом  $k$  еліптичний косинус все більше відрізняється від кругового. На рис. 2.3 представлені графіки  $\operatorname{cn} u$ , отримані так, як показано на рис. 2.2. Еліптична синусоїдальна функція може бути знайдена подібним способом з використанням визначаючої рівності  $\operatorname{sn} u = \sin \varphi$ .

Еліптичні функції за своїми властивостями багато в чому подібні відповідним круговим функціям. Так,

$$\operatorname{cn} u = \cos \varphi;$$

$$\operatorname{sn} u = \sin \varphi,$$

і тому,

$$\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Також,

$$\operatorname{cn}(u + 2K) = \cos(\varphi + \pi) = -\cos \varphi = -\operatorname{cn} u;$$

$$\operatorname{sn}(u + 2K) = \sin(\varphi + \pi) = -\sin \varphi = -\operatorname{sn} u$$

і

$$\operatorname{cn}(u + 4K) = \cos(\varphi + 2\pi) = \cos \varphi = \operatorname{cn} u;$$

$$\operatorname{sn}(u + 2K) = \sin(\varphi + 2\pi) = \sin \varphi = \operatorname{sn} u.$$

Отже, як і  $\operatorname{cn} u$ , так і  $\operatorname{sn} u$  – періодичні функції з періодом  $4K$ . З огляду на те, що  $K(k)$  залежить від  $k$ , цей період є функцією  $k$ . Графіки на рис. 2.3 зображають лише першу четверть повного циклу.

Знаходить застосування ще одна, третя еліптична функція, яку деколи називають дельтою амплітуди –  $\operatorname{dn} u$ , яка визначається рівністю

$$\operatorname{dn} u = (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)^{\frac{1}{2}}.$$

Еліптичний інтеграл можна записати у вигляді

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\operatorname{dn} u}.$$

Похідні від еліптичних функцій:

$$\frac{d(\operatorname{cn} u)}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u;$$

$$\frac{d(\operatorname{sn} u)}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u;$$

$$\frac{d(\operatorname{dn} u)}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Скориставшись формулами для похідних і визначеннями еліптичних функцій, легко знайти зв'язок між еліптичною функцією і її похідною ( $k'^2 = 1 - k^2$ ):

$$\left[ \frac{d}{du} \operatorname{sn}(u, k) \right]^2 + (1 + k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)) - k^2 \operatorname{sn}^4(u, k) = 1.$$

Графіки, що ілюструють характер всіх трьох еліптичних функцій, приведені на рис. 2.4. При цьому зображена лише четверть повного циклу для трьох значень  $k$ .

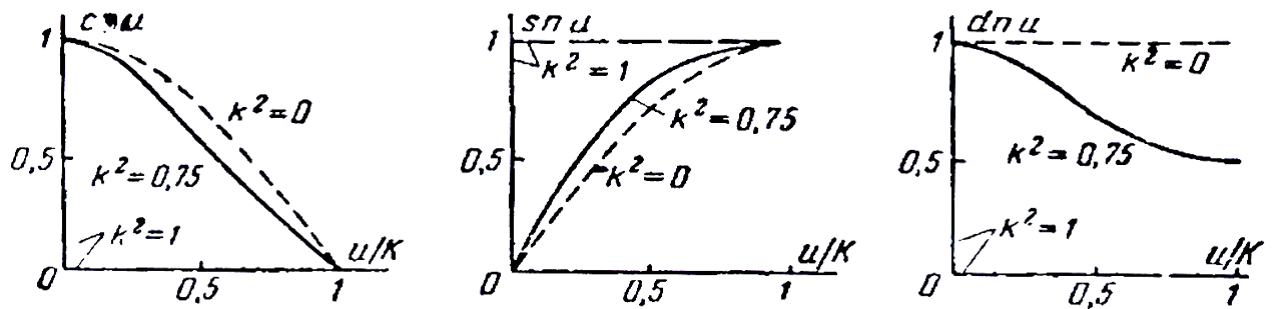


Рисунок 2.4 – Графіки першої чверті циклу змін еліптичних функцій  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$  і  $\operatorname{dn} u$ , побудовані в залежності від нормалізованого аргументу  $\frac{u}{K}$  для трьох

значень модуля  $K$



Графіки дані в нормалізованому масштабі осі абсцис  $\frac{u}{K}$  так, що четверть періоду завжди відповідає відрізку  $0 \leq \frac{u}{K} \leq 1$ . При  $k = 0$  криві мають форму кругових функцій. З ростом  $k$  еліптичний косинус набуває вигляду гострого імпульса, а еліптичний синус наближається до прямокутної хвилі. При цьому період по  $u$  збільшується як для  $\operatorname{sn} u$ , так і для  $\operatorname{sn} i u$ .

## 2.1 Обернення еліптичного інтеграла

Розглянувши еліптичні інтеграли, з'ясуємо поняття еліптичних функцій. У деякому відношенні еліптичні функції подібні відомим тригонометричним функціям і є їхніми узагальненнями. Перш за все з'ясуємо той факт, що основні тригонометричні функції, наприклад  $x = \sin u$ , можна отримати за допомогою так званого перетворення інтегралів. Розглянемо елементарний інтеграл:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad (2.1)$$

Величина інтеграла є функцією верхньої межі інтегралах. Будемо розглядати обернену функцію, тобто розглядатимемо верхню межу  $x$  як функцію величини інтеграла  $u$ . Таким чином ми отримуємо однозначну, регулярну і періодичну функцію  $x = \sin u$ . Кажуть, що ця функція отримується в результаті обернення інтегралу (2.1). Так само, якби ми взяли інтеграл першого роду:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad (2.2)$$

то в результаті його обернення, як виявляється, отримується аналітична однозначна функція  $x = f(u)$ . Ця функція вже не буде цілою. Вона буде дробовою функцією, і окрім того, вона вже володітиме не одним, а двома суттєво різними періодами. Зараз ми зупинимось на розгляді еліптичного інтегралу першого роду в формі Лежандра.

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad (2.3)$$

Причому вважатимемо  $k$  дійсним числом, що задовольняє нерівності  $0 < k < 1$ .

При розгляді задачі конформного перетворення верхньої напівплощини  $z$  на прямокутник площини  $u$  [див. додатки]. Застосуємо основні результати, що відносяться сюди, лише з деякими змінами. Формула (2.3) дає комфорне перетворення верхньої напівплощини  $z$  в деякий прямокутник  $ABCD$  площини  $u$ . Його сторона  $AB$  лежить на дійсній осі, і вершини  $A$  і  $B$  мають координати:

$$\pm K = \pm \int_0^l \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (2.4)$$

$$AB = 2 \int_0^l \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (2.5)$$

Довжина сторони  $BC$  визначається за формулою:

$$BC = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}.$$

Якщо в цій формулі введемо замість  $z$  нову змінну інтегрування  $x$  за формулою  $z = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2 x^2}}$ , де  $k'^2 = 1 - k^2$ , то зробивши заміну, отримаємо новий вираз для довжини сторони  $BC$ , яка як і довжина  $AB$ , буде виражатися повним еліптичним інтегралом першого роду.

Довжина:

$$BC = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2 x^2)}} = K', \quad (2.6)$$

де число  $k'^2$  визначається за формулою:

$$k^2 + k'^2 = 1. \quad (2.7)$$

Число  $k$  називається зазвичай модулем інтеграла (2.3), а число  $k'$  - додатковим модулем, причому маємо (2.7).

Будемо здійснювати тепер аналітичне продовження функції (2.3). Якщо, наприклад, зробимо аналітичне продовження з верхньої напівплощини в нижню, через відрізок  $(1, \frac{1}{k})$ , дійсної осі, то отримана функція буде перетворювати нижню напівплощину в прямокутник, який отримаємо з основного прямокутника  $ABCD$  відображенням в стороні  $BC$ , одержуваної зі згаданого відрізка дійсної осі. Так само і подальші аналітичні продовження з однієї напівплощини в іншу будуть давати значення й у вигляді прямокутника площини, і одержуваного з попереднього прямокутника за допомогою відображення в тій його стороні, котра відповідає відрізку дійсної осі, через

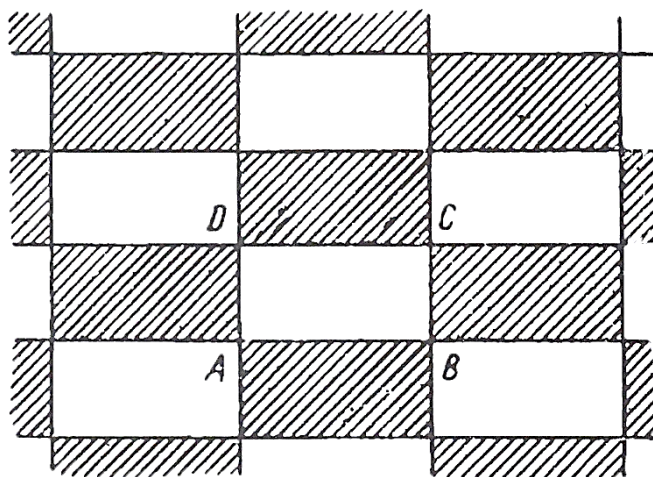


Рисунок 2.5 – Зображення на площині  $u$  аналітичного продовження еліптичного інтегралу першого роду в формі Лежандра на площині  $z$

який здійснювалось аналітичне продовження. Таким чином, взагалі будь-які аналітичні продовження функції (2.3) на площині  $z$  дадуть на площині  $u$  сітку однакових прямокутників, котрі заповнять всю площину  $u$ , ніде не накладаючись один на одний. Кожному такому прямокутнику буде відповідати або верхня, або нижня напівплощина  $z$ .

Нарис. 2.5 зображена ця сітка, до того ж не заштрихованим прямокутникам відповідає верхня напівплощина, а заштрихованим – нижня. Навпаки, роблячи аналітичне продовження функції  $z = f(u)$ , отриманої в результаті обернення (2.3) уздовж деякої лінії  $l$ , маємо лише звертати увагу на те, які сторони прямокутника перетинає ця лінія. Таким чином отримуємо на площині  $z$  перехід з однієї напівплощини в іншу через відповідні відрізки дійсної осі. Якщо ми, наприклад, на площині  $u$  обійдемо навколо якої-небудь вершини нашої сітки прямокутників, то на площині  $z$  прийдемо до колишніх значень  $z$ . Таким чином, бачимо, що функція  $f(u)$  є однозначною аналітичною функцією на всій площині  $u$ .

Точці  $u = iK'$ , яка лежить на середині сторони  $CD$  основного прямокутника, відповідає значення  $z = \infty$ , причому однолистаоколиця точки  $u = iK'$  переходить в однолисту околицю точки  $z = \infty$ , і звідси видно, що

функція  $f(u)$  має в точці  $iK'$  простий полюс. Аналогічні точки будуть у кожному прямокутнику нашої сітки, тобто  $f(u)$  є дробовою функцією.

Покажемо, нарешті, що функція  $f(u)$  має дійсний період  $4K$  і суто уявний період  $i2K'$ . Візьмемо нашу сітку прямокутників і складемо з неї нову сітку більших прямокутників, об'єднуючи в один прямокутник чотири прямокутники, які мають загальну вершину (рис. 2.6). Цей великий прямокутник має сторону, паралельну уявній осі, довжиною  $4K$  і сторону, паралельну дійсній осі, довжиною  $2K'$ .

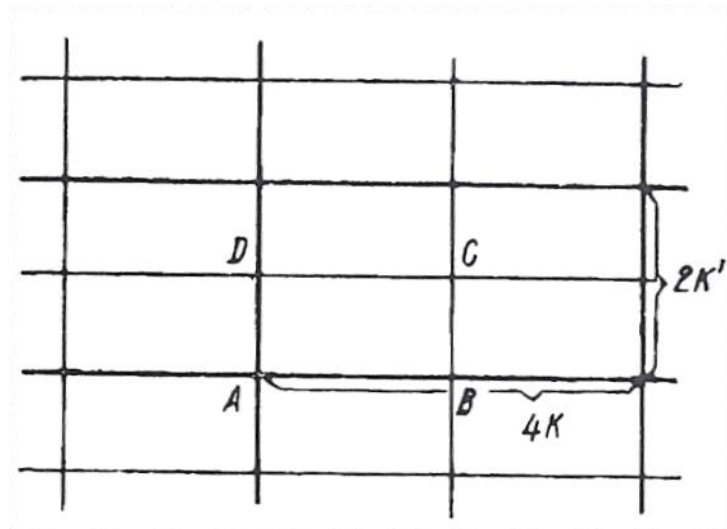


Рисунок 2.6 – Перехід від сітки, утвореної на площині  $u$  шляхом аналітичного продовження еліптичного інтегралу першого роду в формі Лежандра на площині  $z$ , до сітки із більшим кроком ( $4K \times 2K'$ )

Перехід від  $u$  до  $u + 4K$  або від  $u$  до  $u + i2K'$  рівносильний геометричному переходу в сусідній чотирикутник, причому значення  $f(u)$  при цьому переході не змінюється. Наприклад (рис. 2.7), перехід від  $u$  до  $u + 4K$  рівносильний послідовним відображенням у прямих  $BC$  і  $A'D'$ , що дає на площині  $z$  два відображення в дійсній осі і призводить до попереднього

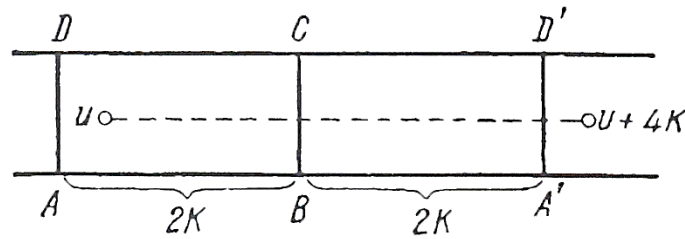


Рисунок 2.7 – Геометричне відображення переходу у функції  $f(u)$  від  $u$  до  $u + 4K$

значення  $z$ . Таким чином, маємо дійсно двояку періодичність функції  $f(u)$  відображену наступними формулами:

$$f(u + 4K) = f(u), f(u + i2K') = f(u).$$

Отримана нами однозначна функція, зважаючи на її деяку аналогію з  $\sin(u)$  позначається зазвичай таким чином:  $z = \operatorname{sn}(u)$ .

В результаті обернення інших еліптичних інтегралів першого виду ми будемо отримувати інші дробові двояко-періодичні функції. Ми займаємося зараз загальною теорією таких функцій і деяких пов'язаних з ними функцій, також дещо змінимо попередні позначення.

## 2.2 Загальні властивості еліптичних функцій

Нехай  $\omega_1$  і  $\omega_2$  – які-небудь два комплексних числа, відношення яких не є числом дійсним. Функція  $f(u)$  називається еліптичною, якщо  $f(u)$  є дробовою функцією з двома періодами  $\omega_1$  і  $\omega_2$  :

$$\begin{aligned} f(u + \omega_1) &= f(u), \\ f(u + \omega_2) &= f(u) \end{aligned} \tag{2.8}$$

тотожне при будь-якому  $u$ . Інакше кажучи, додавання  $\omega_1$  або  $\omega_2$  до аргументу не змінює значення функції. З формули (2.8) випливає і більш загальна формула:

$$f(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = f(u), \quad (2.9)$$

де  $m_1$  і  $m_2$  – будь-які цілі числа, позитивні чи негативні.

Пояснимо геометричні властивості двоякої періодичності. Відкладемо від якоїсь т.  $A$  площини  $u$  два вектори  $AB$  та  $AD$ , які відповідають комплексним числам  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . З огляду на те, що відношення  $\omega_1:\omega_2$  за умовою не дійсне, ці вектори лежать на різних прямих, і ми можемо побудувати на них паралелограм  $ABCD$ . Роблячи паралельне перенесення цього паралелограма на вектор  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , ми покриємо всю площину сіткою однакових паралелограмів (рис.2.8). Перехід від будь-якого паралелограма в сусідній рівносильний переходу від  $u$  до  $u + \omega_1$  або  $u + \omega_2$ , і в силу двоякої періодичності значення  $f(u)$  у відповідних точках побудованих паралелограмів будуть однакові.

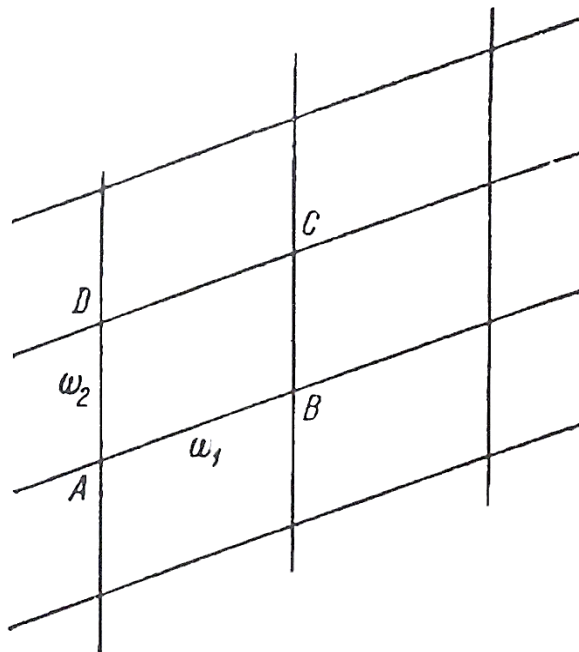


Рисунок 2.8 – Сітка паралелограмів періодів функції  $f(u)$

Кожен із згаданих паралелограмів називається паралелограмом періодів функції  $f(u)$ . Зауважимо, що вибір згаданої вище основної вершини  $A$  може бути зроблений абсолютно довільно.

Перейдемо до з'ясування основних властивостей еліптичних функцій. Диференціюючи рівняння (2.9) $n$  разів, отримаємо:

$$f^{(n)}(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = f^{(n)}(u),$$

тобто похідні еліптичної функції будуть теж еліптичними функціями з тими ж періодами. Припустимо далі, що  $f(u)$  зовсімне має полюсів, тобто є цілою функцією. Її паралелограм періодів є обмежена частина площини, і в цьому паралелограмі, включаючи його контур, вона регулярна, а отже, неперервна, а тому й обмежена, тобто, існує таке позитивне число  $N$ , що в основному паралелограмі періодів виконується нерівність  $|f(u)| < N$ . В інших паралелограмах сітки значення  $f(u)$  повторюються, і, отже, наведена нерівність виконується на всій площині, тобто  $f(u)$  є ціла функція, обмежена на всій площині. Згідно з теоремою Ліувілля, можна стверджувати, що така функція повинна бути постійною величиною, отже ми маємо наступну теорему:

**ТЕОРЕМА I.** Якщо  $f(u)$  є ціла, двояко-періодична функція, то  $f(u)$  є величина постійна.

Висловлена теорема представляється досить важливою за тими двома наслідкам з неї, які ми зараз встановимо. Нехай  $f_1(u)$  і  $f_2(u)$  - дві еліптичні функції з однаковими періодами  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Припустимо, що вони мають в паралелограмі періодів однакові полюси, з однаковими нескінченними частинами. При цьому різниця  $f_2(u) - f_1(u)$  буде подвійно-періодичною функцією без полюсів, тобто вона буде цілою двояко-періодичною функцією, і з теореми випливає, що ця різниця повинна бути постійною величиною. Отже, ми маємо:



НАСЛІДОК I. Якщо дві еліптичні функції  $f_1(u)$  і  $f_2(u)$  з однаковими періодами мають в паралелограмі періодів одні й ті ж полюси, з однаковими нескінченними частинами, то вони відрізняються лише постійним доданком.

Припустимо тепер, що  $f_1(u)$  і  $f_2(u)$  мають в паралелограмі періодів одні й ті ж полюси однакової кратності, і одні й ті ж корені однакової кратності. При цьому відношення  $f_2(u):f_1(u)$  не буде зовсім мати в паралелограмі ні коренів, ні полюсів і повинне дорівнювати постійній величині.

Маємо:

НАСЛІДОК II. Якщо дві еліптичні функції  $f_1(u)$  і  $f_2(u)$  з однаковими періодами мають в паралелограмі періодів однакові корені і полюси, однієї і тієї ж кратності у обох функцій, то ці функції відрізняються лише постійним множником.

## 2.3 Еліптичні функції Якобі

Еліптичні функції в аналізі зазвичай вводяться або як мероморфні двояко-періодичні функції комплексної змінної, або як зворотні функції еліптичних інтегралів. Тут скористаємося визначенням еліптичних функцій Якобі за допомогою диференціальних рівнянь.

Функція синус амплітуди задовольняє диференціальному рівнянню:

$$sn'(t | k) = y' = \sqrt{(1 - k^2 y^2)(1 - y^2)}. \quad (2.10)$$

Позначимо:

$$cn'(t | k) = 1 - sn^2(t | k), dn^2 = 1 - k^2 sn^2(t | k).$$

Функція  $cn(t|k)$  називається косинус амплітуди або косинус Якобі, а  $dn(t|k)$

-

дельта амплітуди. Виведемо формули для похідних цих функцій.

$$2cn'(t|k)cn(t|k) = -2sn(t|k)\sqrt{(1-sn^2(t|k))(1-k^2sn^2(t|k))},$$

$$2dn'(t|k)dn(t|k) = -2k^2sn(t|k)\sqrt{(1-sn^2(t|k))(1-k^2sn^2(t|k))}.$$

або

$$sn'(t|k) = cn(t|k)dn(t|k),$$

$$cn'(t|k) = -sn(t|k)dn(t|k),$$

$$dn'(t|k) = -k^2sn(t|k)cn(t|k).$$

Таким чином, трійка функцій  $sn(t|k)$ ,  $cn(t|k)$ ,  $dn(t|k)$  задовольняє системі рівнянь:

$$y'_1 = y_2y_3, y'_2 = -y_1y_3, y'_3 = -k^2y_1y_2, \quad (2.11)$$

з початковими умовами, що виходять з інтегрального представлення:

$$y_1|_{u=0} = 0, y_2|_{u=0} = 1, y_3|_{u=0} = 1. \quad (2.12)$$

Якщо відволіктись від витоків появи функції  $sn(t|k)$ - яка є вираженням інтеграла (2.10), то можна вводити еліптичні функції як розв'язок задачі Коші (2.11), (2.12). Один перший інтеграл цієї системи виходить, якщо перше рівняння помножити на  $2y_1$ , друге - на  $2y_2$  і скласти обидва отриманих вирази.

$$2y_1y'_1 + 2y_2y'_2 = (y_1^2 + y_2^2)' = 0.$$

Ще один інтеграл отримаємо, якщо перше рівняння домножити на  $2k^2y_1$ , а третє - на  $2y_3$ , і додати їх:

$$2k^2y'_1y_1 + 2y'_3y_3 = (k^2y_1^2 + y_3^2)' = 0$$

В результаті два перших інтеграла:

$$y_1^2 + y_2^2 = c_1, \quad k^2 y_1^2 + y_3^2 = c_2.$$

Константи  $c_1$  та  $c_2$  визначаються з початкових умов (2.12). З цього випливають наступні тотожності:

$$sn^2(t|k) + cn^2(t|k) = 1, \quad k^2 sn^2(t|k) + dn^2(t|k) = 1. \quad (2.13)$$

Отже, через основну функцію  $sn(t, k)$  визначаються дві інші:

$$\begin{aligned} cn(t, k) &= \sqrt{1 - sn^2(t, k)}, \\ dn(t, k) &= \sqrt{1 - k^2 sn^2(t, k)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Тут беруться значення квадратних коренів, котрі при  $t=0$  ( $sn(0, k)=0$ ) обертаються в 1 і далі продовжуються в комплексну площину так, щоб при цьому забезпечувалась неперервність та диференційованість функцій. Таким чином:

$$cn(0, k) = dn(0, k) = 1.$$

З формул (2.14) слідує, що  $cn(-t, k)$  і  $dn(t, k)$  – парні функції:

$$cn(-t, k) = cn(t, k), \quad dn(-t, k) = dn(t, k). \quad (2.15)$$

### 2.3.1 Властивості функцій Якобі

Дослідимо властивості еліптичних функцій.

#### 1. Область значень.

Область значень функцій Якобі легко визначити із тотожності (2.13)

$$-1 \leq sn(t|k) \leq 1, \quad -1 \leq cn(t|k) \leq 1, \quad \sqrt{1-k^2} \leq dn(t|k) \leq 1$$

#### 2. Область визначення.

Тут ми будемо розглядати еліптичні функції як дійсну функцію дійсної змінної. Через це потрібно обмежитись значенням  $k \in [0,1]$ . Значення параметру  $k > 1$  призводять до комплексного розв'язку системи (2.11). Це впливає з тотожностей (2.13).

Теорема про існування розв'язків задачі Коші стверджує, що розв'язок задачі (2.11), (2.12) існує на проміжку  $-\delta < t < \delta$ , але функції обмежені по всій їх області існування. Із системи рівнянь (2.12) випливає, що похідні також обмежені і диференціюються. Тому на подібні інтервали можна розбити всю дійсну вісь і довести, що існує розв'язок системи при  $-\infty < t < \infty$ .

### 3. Властивість парності.

З'ясуємо, як змінюється рівняння (2.11) при заміні знаку незалежної змінної  $z_j(t) = y_j(-t)$ . Система рівнянь для  $z_j$  має майже такий самий вигляд як і (2.11), тільки знаки правої частини замінені на протилежні. Начальні дані для функцій  $z_j$  залишаються такими як і для  $y_j$ . Виходячи з цього, функції  $z_j$  легко виразити через  $y_j$ :

$$z_1(t) = -y_1(-t), z_2(t) = -y_2(-t), z_3(t) = y_3(-t).$$

Таким чином:

$$sn(-t) = -sn(t), cn(-t) = cn(t), dn(-t) = dn(t).$$

### 4. Монотонність.

Область монотонності розв'язків системи (2.11) визначається знаком похідної. При  $t = 0$  похідна функції  $sn(t)$  дорівнює одиниці. Отже, функція зростає і:

$$y_1' = \sqrt{(1 - y_1^2)(1 - k^2 y_1^2)}.$$

Ця функція зростає до тих пір, пока не досягне свого максимуму  $sn(K(k) | k) = 1$ . Значення  $K(k)$  знаходиться з інтеграла:

$$K(k) = \int_0^1 dx \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}$$

При цьому

$$cn(K(k)|k) = 0, \quad dn(K(k)|k) = \sqrt{1-k^2}.$$

### 5.3сув.

Тут представимо виведення формули для  $sn(t+\nu)$ . Цей метод належить Ейлеру.

Припустимо, що  $t$  і  $\nu$  змінюються таким чином, що  $t+\nu = \alpha = const$ , отже

$$\frac{d\nu}{dt} = -1.$$

Для зручності позначимо  $s_1 = sn(t)$ ,  $s_2 = sn(\nu)$ , тоді:

$$2s_2's_1'' = -(1+k^2)2s_1s_1' + 4k^2s_1^3s_1', \quad 2s_2's_2'' = -(1+k^2)2s_2s_2' + 4k^2s_2^3s_2'$$

Тут штрих означає дифференціювання пот. З виразу квадратів першої похідної:

$$(s_1')^2 = (1-s_1^2)(1-k^2s_1^2), \quad (s_2')^2 = (1-s_2^2)(1-k^2s_2^2),$$

Отримаєм:

$$\frac{s_1''s_2 - s_2''s_1}{(s_1')^2s_2^2 - (s_2')^2s_1^2} = \frac{2k^2s_1s_2(s_1^2 - s_2^2)}{(s_2^2 - s_1^2)(1-k^2s_1^2s_2^2)}.$$

Тоді:

$$(s_1's_2 - s_2's_1)^{-1} \frac{d}{du} (s_1's_2 - s_2's_1) (1-k^2s_1^2s_2^2)^{-1} \frac{d}{du} (1-k^2s_1^2s_2^2).$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\frac{s_1's_2 - s_2's_1}{1-k^2s_1^2s_2^2} = C.$$

Таким чином:

$$\frac{cn(t)dn(t)sn(\nu) + cn(\nu)dn(\nu)sn(t)}{1-k^2sn^2(t)sn^2(\nu)} = C.$$

Отже, вираз в правій частині є функція від  $\alpha$ :  $f(t + \nu) = f(\alpha)$ .

Позначимо  $\nu = 0$ , отримаємо що  $f(t) = sn(t)$ .

В результаті доведена формула додавання:

$$sn(t + \nu) = \frac{cn(t)dn(t)sn(\nu) + cn(\nu)dn(\nu)sn(t)}{1 - k^2 sn^2(t)sn^2(\nu)}, \quad (2.16)$$

## 6.Періодичність.

Для знаходження значень функції Якобі при зсуві на  $K(k)$  скористаємося отриманною формулою (2.16):

$$sn(t + K) = \frac{cn(t)}{dn(t)}. \quad (2.17)$$

Тоді:

$$cn^2(t + k) = 1 - \frac{cn^2(t)}{dn^2(t)} = \frac{dn^2(t) - cn^2(t)}{dn^2(t)} = \frac{1 - k^2 sn^2(t) - cn^2(t)}{dn^2(t)}.$$

або

$$cn^2(t + k) = (1 - k^2) \frac{sn^2(t)}{dn^2(t)}.$$

В результаті отримаємо:

$$cn(t + K) = -\sqrt{1 - k^2} \frac{sn(t)}{dn(t)}. \quad (2.18)$$

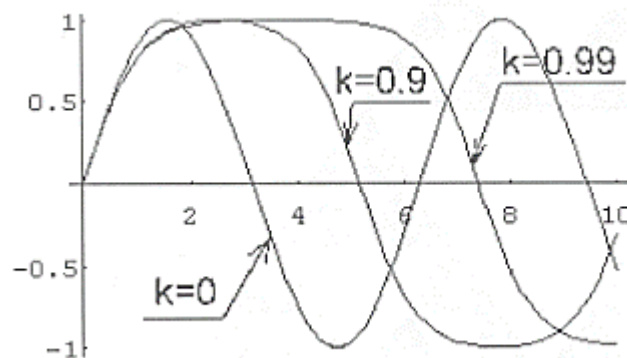


Рисунок 2.9– Функція  $sn(t|k)$  при різних значеннях  $k$

Знак мінус при обчисленні кореня вибирається виходячи з наступних міркувань. При  $K < t < 2K$ ,  $sn(t) > 0$  і спадає, а функція  $cn(t)$  менше нуля і також спадає. Отже, функція  $cn(t)$  має різні знаки при  $0 < t < K$  і  $K < t < 2K$ .

Аналогічні обчислення дають:

$$dn(t+K) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{dn(t)}. \quad (2.19)$$

Із формул (2.17) – (2.19) отримуємо вирази для зсуву на  $2K$ :

$$sn(t+2K) = \frac{cn(t+K)}{dn(t+K)} = -sn(t),$$

$$cn(t+2K) = -\sqrt{1-k^2} \frac{sn(t+K)}{dn(t+K)} = -cn(t+K),$$

$$dn(t+2K) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{dn(t+k)} = dn(t).$$

Тоді:

$$sn(t+4K) = sn(t), \quad cn(t+4K) = cn(t).$$

Функції  $sn(t)$  та  $cn(t)$  - періодичні з періодом  $4K$ , функція  $dn(t)$  - періодична з періодом  $2K$ .

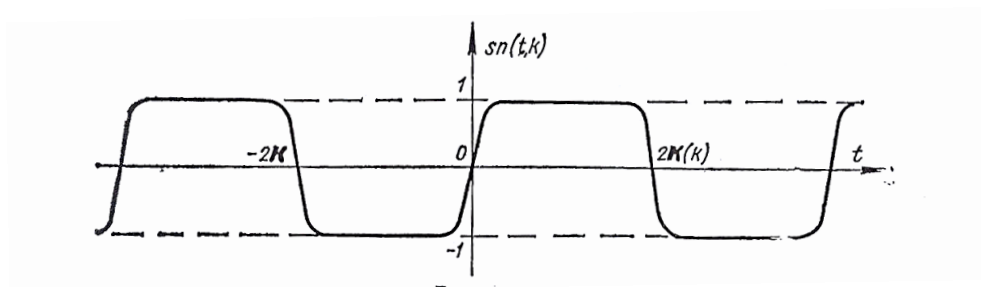


Рисунок 2.10 – Графік еліптичного синуса  $sn(t, k)$  для проміжних значень модуля  $k$

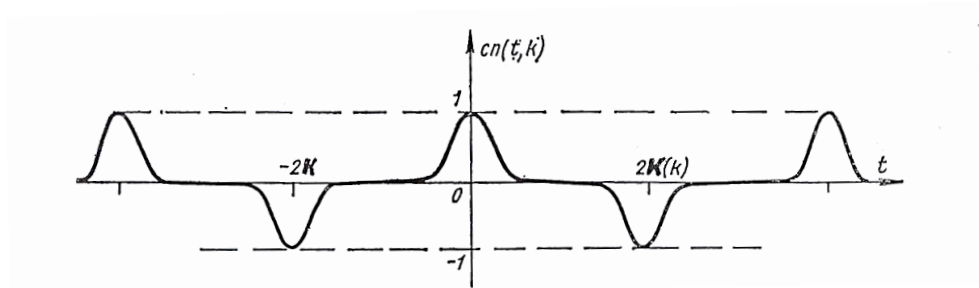


Рисунок 2.11 – Графік косинуса Якобі  $\text{cn}(t, k)$  для проміжних значень модуля  $k$

Синус Якобі  $\text{sn}(t, k)$  - періодична функція аргументу з періодом  $4K$  :  $\text{sn}(t + 4K, k) = \text{sn}(t, k)$ .

При малих значеннях модуля еліптичного синуса ( $k \ll 1$ ) функції  $\text{sn}(t, k)$  і  $K(t, k)$  можуть бути розкладені у степеневі ряди по параметру  $k$ . Перші члени відповідних розкладів мають наступний вигляд:

$$\text{sn}(t, k) \approx \left(1 - \frac{3}{16}k^2\right) \sin \left[ t \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) \right] + \frac{k^2}{16} \sin \left[ 3t \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) \right], \quad K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right).$$

Отже, при  $k \rightarrow 1$  період прямує до нескінченності,  $K \rightarrow \ln(4/\sqrt{1-k^2})$ , і синус Якобі перетворюється в гіперболічний тангенс:  $\text{sn}(t, k) \rightarrow \text{th } t$ . Графік еліптичного синуса  $\text{sn}(t, k)$  для проміжних значень модуля  $k$  наведений на рис. 2.10.

Аналогічно тригонометричним функціям, в теорії еліптичних функцій нарівні з синусом амплітуди вводиться косинус амплітуди, або *еліптичний косинус*  $\text{cn}(t, k)$ . Зв'язок еліптичних синусів і косинусів такий самий як і їх тригонометричних аналогів:

$$\text{cn}(t, k) = \sqrt{1 - \text{sn}^2(t, k)}. \quad (2.20)$$



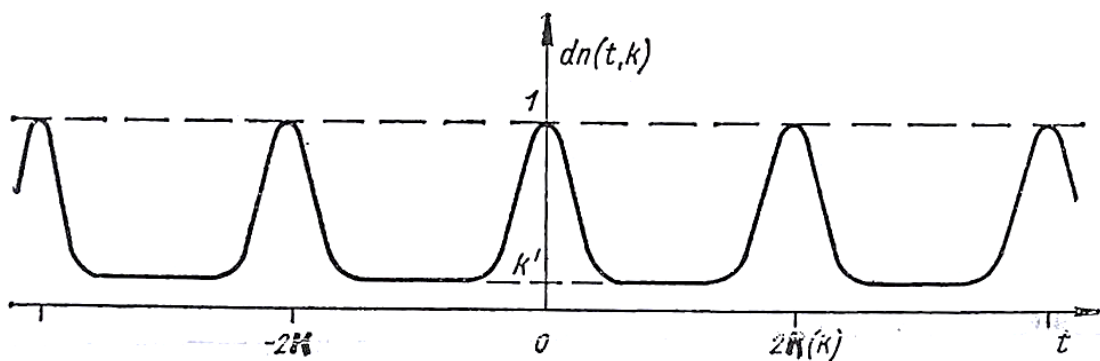


Рисунок 2.12 – Дельта амплітуди  $dn(t, k)$  для проміжних значень модуля  $k$

Однак, тригонометричні функції  $\sin u$  і  $\cos u$  відрізняються лиш зсувом на  $\pi$ , а функції  $sn(t, k)$  і  $cn(t, k)$  - суттєво відмінні. Графік косинуса Якобі наведений на рис. 2.11, період функції  $sn(t, k)$  також складає  $4K(k)$  (правда, уявний період дорівнює  $4K'(k)$ ). З операції (2.20) випливає, що в границі  $k \rightarrow 0$  косинус Якобі переходить в тригонометричний, а в зворотній границі  $k \rightarrow 1$  - в гіперболічний секанс:  $cn(u, r) \rightarrow 1 / \text{ch}(u)$ .

### 2.3.2 Властивості функцій Якобі (інший підхід)

Зупинимось ще на формулах для еліптичних функцій Якобі. Позначення функції Якобі:  $sn(t)$  і  $cn(t)$  підкреслюють їх спорідненість з  $\sin(t)$  і  $\cos(t)$  відповідно. Якщо модуль  $k = 0$ , то ці функції перетворюються в  $\sin(t)$  і  $\cos(t)$ ; функція  $dn(t)$  вироджується при цьому в 1.

Взагалі, при  $k = 0$  інтеграл

$$t = \int_0^{\omega} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

перетворюється в

$$t = \int_0^{\omega} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}};$$

тому обернена функція  $\omega = sn(t, k)$  переходить в  $\omega = \sin(t)$ . Формули (2.14) дають

$$cn(t, 0) = \cos(t), \quad dn(t, 0) = 1.$$

За допомогою (2.14) формулу

$$sn(it, k) = i \frac{sn(t, k')}{\sqrt{1 - sn^2(t, k')}}.$$

можна представити у вигляді

$$sn(it, k) = i \frac{sn(t, k')}{cn(t, k')}, \quad (2.21)$$

де  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  - додатковий модуль (по відношенню до  $k$ ). Формули (2.14) дозволяють тепер виразити  $cn(it, k)$  і  $dn(it, k)$  через відповідні функції додаткового модуля

$$cn(it, k) = \sqrt{1 - sn^2(it, k)} = \sqrt{1 + \frac{sn^2(t, k')}{cn^2(t, k')}} = \frac{1}{cn(t, k')}; \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} dn(it, k) &= \sqrt{1 - k^2 sn^2(it, k)} = \sqrt{1 + k^2 \frac{sn^2(t, k')}{cn^2(t, k')}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - sn^2(t, k') + (1 - k'^2) sn^2(t, k')}}{cn(t, k')} = \frac{dn(t, k')}{cn(t, k')}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Замінімо в формулах (2.21), (2.22) і (2.23)  $t$  через  $-it$  (і зрозуміло,  $it$  через  $t$ ); отримаємо:

$$sn(t, k) = -i \frac{sn(it, k')}{cn(it, k')},$$

$$cn(t, k) = -i \frac{1}{cn(it, k')},$$

$$dn(t, k) = \frac{dn(it, k')}{cn(it, k')}.$$

Помічаючи, що при  $k = 1$  додатковий модуль  $k'$  обертається в нуль, отримаємо:

$$sn(t, 1) = -i \frac{sn(it, 0)}{cn(it, 0)} = -i \frac{\sin(it)}{\cos(it)} = \frac{sh(t)}{ch(t)};$$

$$cn(t, 1) = -i \frac{1}{cn(it, 0)} = \frac{1}{\cos(it)} = \frac{1}{ch(t)},$$

$$dn(t, 1) = -i \frac{dn(it, 0)}{cn(it, 0)} = \frac{1}{\cos(it)} = \frac{1}{ch(t)}.$$

Отже, при  $k = 1$  якобієві функції переходять у відношення гіперболічних функцій. Відповідні графіки (для дійсних значень  $t$ ) зображені на рис. 2.13. Таким чином якобієві функції  $sn(t, k), cn(t, k), dn(t, k)$  при неперервній зміні модуля  $k$  від 0 до 1, ніби прокладають міст від кругових функцій  $\sin(t), \cos(t)$  (до котрих ще приєднується тотожна константа 1) до

гіперболічних:  $\frac{sh(t)}{ch(t)}, \frac{1}{ch(t)}, \frac{1}{ch(t)}$ .

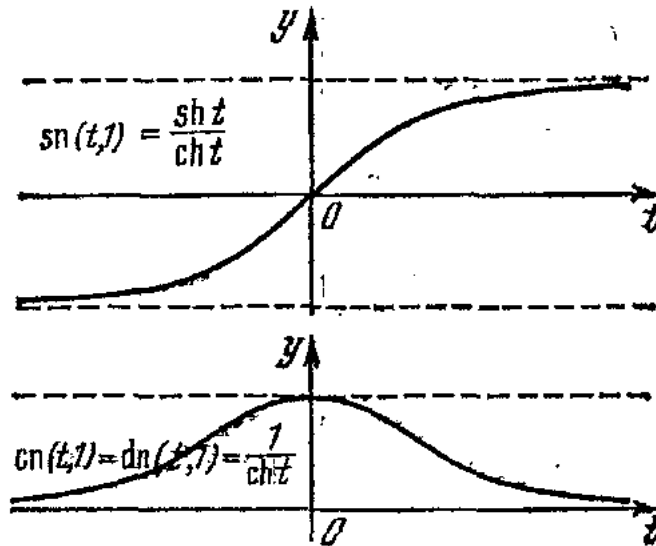


Рисунок 2.13 – Функції Якобі для дійсних значень  $t$  при  $k = 1$

За допомогою функцій  $cn(t, k)$  і  $dn(t, k)$  теорема додавання для  $sn(t, k)$  приймає вид:

$$\begin{aligned}
 sn(\alpha + \beta, k) = & \\
 & \frac{sn(\alpha, k)cn(\beta, k)dn(\beta, k) + sn(\beta, k)cn(\alpha, k)dn(\alpha, k)}{1 - k^2 sn^2(\alpha, k)sn^2(\beta, k)} = \\
 & \frac{sn^2(\alpha, k) - sn^2(\beta, k)}{sn(\alpha, k)cn(\beta, k)dn(\beta, k) + sn(\beta, k)cn(\alpha, k)dn(\alpha, k)}.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Щоб вивести з (2.24) теореми додавання для  $cn(t, k)$  і  $dn(t, k)$  скористаємось наступними тотожностями, справедливості яких перевіряються за допомогою формул (2.14):

$$\begin{aligned}
 & (sn(\alpha)cn(\beta)dn(\beta) + sn(\beta)cn(\alpha)dn(\alpha))^2 + \\
 & (cn(\alpha)cn(\beta) + sn(\beta)sn(\alpha)dn(\alpha)dn(\beta))^2 = \\
 & (dn(\alpha)dn(\beta) - k^2 sn(\alpha)sn(\beta)cn(\alpha)cn(\beta))^2 + \\
 & k^2 (sn(\alpha)cn(\beta)dn(\beta) + sn(\beta)cn(\alpha)dn(\alpha))^2 = \\
 & (1 - k^2 sn^2(\alpha)sn^2(\beta))^2.
 \end{aligned}$$

Отримаємо:

$$cn(\alpha + \beta, k) = \sqrt{1 - sn^2(\alpha + \beta, k)} = \frac{\sqrt{(1 - k^2 sn^2(\alpha) sn^2(\beta))^2 - (sn(\alpha) cn(\beta) dn(\beta) + sn(\beta) cn(\alpha) dn(\alpha))^2}}{1 - k^2 sn^2(\alpha) sn^2(\beta)} = (2.25)$$

$$\frac{cn(\alpha) cn(\beta) - sn(\alpha) sn(\beta) dn(\alpha) dn(\beta)}{1 - k^2 sn^2(\alpha) sn^2(\beta)}.$$

$$dn(\alpha + \beta, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(\alpha + \beta, k)} = \frac{\sqrt{(1 - k^2 sn^2(\alpha) sn^2(\beta))^2 - k^2 (sn(\alpha) cn(\beta) dn(\beta) + sn(\beta) cn(\alpha) dn(\alpha))^2}}{1 - k^2 sn^2(\alpha) sn^2(\beta)} = \frac{dn(\alpha) dn(\beta) - k^2 sn(\alpha) sn(\beta) cn(\alpha) cn(\beta)}{1 - k^2 sn^2(\alpha) sn^2(\beta)}.$$

(2.26)

Встановлені теореми додавання дозволяють виразити значення еліптичних функцій Якобі для будь якого комплексного  $t = \sigma + i\tau$  через ті ж самі функції дійсних змінних  $\sigma$  і  $\tau$ . При цьому знадобляться також формули (2.21), (2.22) і (2.23). Перший із виразів (2.24) дає:

$$sn(\sigma + i\tau, k) = \frac{sn(\sigma, k) cn(i\tau, k) dn(i\tau, k) + sn(i\tau, k) cn(\sigma, k) dn(\sigma, k)}{1 - k^2 sn^2(\sigma, k) sn^2(i\tau, k)} = (2.27)$$

$$\frac{sn(\sigma, k) dn(\tau, k') + i sn(\tau, k') cn(\sigma, k') cn(\sigma, k) dn(\sigma, k)}{cn^2(\tau, k') + k^2 sn^2(\sigma, k) sn^2(\tau, k')}.$$

де  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ . Другий з виразів (2.24) дозволяє представити той самий результат в іншому вигляді:

$$sn(\sigma + i\tau, k) = \frac{sn^2(\sigma, k)cn^2(\tau, k') + sn^2(\tau, k')}{sn(\sigma, k)dn(\tau, k') - isn(\tau, k')cn(\tau, k')cn(\sigma, k)dn(\sigma, k)}. \quad (2.27')$$

Точно так же за допомогою формули (2.25) знаходимо, що

$$cn(\sigma + i\tau, k) = \frac{cn^2(\sigma, k) - isn(\sigma, k')sn(\tau, k')dn(\sigma, k)dn(\tau, k')}{cn^2(\tau, k') + k^2sn^2(\sigma, k)sn^2(\tau, k')}. \quad (2.28)$$

Той же самий результат представляється у вигляді:

$$cn(\sigma + i\tau, k) = \frac{cn^2(\sigma, k) - k'^2 sn^2(\sigma, k)sn^2(\tau, k')}{cn(\sigma, k)cn(\tau, k') + isn(\sigma, k)sn(\tau, k')dn(\sigma, k)dn(\tau, k')}. \quad (2.28')$$

Аналогічно для функції  $dn(t)$  отримуємо:

$$dn(\sigma + i\tau, k) = \frac{dn(\sigma, k)cn(\tau, k')dn(\tau, k') - ik^2 sn(\sigma, k)cn(\sigma, k)sn(\tau, k')}{cn^2(\tau, k') + k^2sn^2(\sigma, k)sn^2(\tau, k')} = \frac{k^2cn^2(\sigma, k) + k'cn^2(\tau, k')}{dn(\sigma, k)cn(\tau, k')dn(\tau, k') + ik^2 sn(\sigma, k)cn(\sigma, k)sn(\tau, k')}. \quad (2.29)$$

Покладемо

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = K(k) = K, \quad (2.30)$$

де інтегрування проводиться вздовж відрізка дійсної вісі, з'єднувальною точкою 0 і 1, так що  $K(k)$  – число дійсне додатне. З (2.30) випливає:

$$sn[K(k), k] = 1; \quad (2.31)$$

тому

$$cn[K(k), k] = \sqrt{1 - sn^2[K(k), k]} = 0$$

і

$$dn[K(k), k] = \sqrt{1 - k^2 sn^2[K(k), k]} = \sqrt{1 - k^2} = k' \quad (2.32)$$

Опускаючи для кратності в позначеннях вказання модуля  $k$ , покладемо в формулах (2.24), (2.25) і (2.26)  $\alpha = K$  і  $\beta = -t$ . Отримаємо:

$$sn(K - t) = \frac{sn(K)cn(t)dn(t) - sn(t)cn(K)dn(K)}{1 - k^2 cn^2(K)sn^2(t)} = \frac{cn(t)dn(t)}{1 - k^2 sn^2(t)} = \frac{cn(t)}{dn(t)} \quad (2.33)$$

$$cn(K - t) = \frac{cn(K)cn(t) + sn(K)sn(t)dn(K)dn(t)}{1 - k^2 sn^2(K)sn^2(t)} = \frac{k' sn(t)dn(t)}{1 - k^2 sn^2(t)} = k' \frac{sn(t)}{dn(t)}; \quad (2.34)$$

$$dn(K - t) = \frac{dn(K)dn(t) + k^2 sn(K)sn(t)cn(K)cn(t)}{1 - k^2 sn^2(K)sn^2(t)} = \frac{k' dn(t)}{1 - k^2 sn^2(t)} = \frac{k''}{dn(t)}. \quad (2.35)$$

Заміняючи  $t$  на  $-t$ , знайдемо:

$$\begin{aligned}
sn(K+t) &= \frac{cn(t)}{dn(t)} = sn(K-t); \\
cn(K+t) &= -k' \frac{sn(t)}{dn(t)} = -cn(K-t); \\
dn(K+t) &= \frac{k'}{dn(t)} = dn(K-t);
\end{aligned} \tag{2.36}$$

В теорії еліптичних функцій Якобі формули (2.33) – (2.36) грають роль, аналогічну формулам “приведення” в тригонометрії.

Якщо в формулах (2.36) змінити  $t$  на  $t+K$ , то знайдемо наступні «формули приведення».

$$\left. \begin{aligned}
sn(t+2K) &= -sn(t) \\
cn(t+2K) &= -cn(t) \\
dn(t+2K) &= dn(t)
\end{aligned} \right\} \tag{2.37}$$

З останньої формули випливає, що функція  $dn(t)$  – періодична з періодом  $2K$ . Замінімо в перших двох формулах (2.37)  $t$  на  $t+2K$ , отримаємо:

$$sn(t+4K) = sn(t), \quad cn(t+4K) = cn(t) \tag{2.38}$$

Отже,  $sn(t)$  і  $cn(t)$  – також періодичні функції з періодом  $4K$ .

Охарактеризуємо поведінку функцій Якобі дійсної змінної. Почнемо з функції  $y = sn(t, k)$  ( $0 < k < 1$ ). З її визначення – функції, оберненої інтегралу

$$t = \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}}, \quad - \text{впливає, що вона монотонно зростає від } 0 \text{ до } 1,$$

$$\text{коли } t \text{ зростає від } 0 \text{ до } K(k) = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}}. \text{ Перша з формул (2.36)}$$

показує, що графік  $y = sn(t, k)$  симетричний відносно прямої  $t = K$  і, отже, в



інтервалі  $0 \leq t \leq 2K$  має вигляд півхвилі (рис.2.14,а). Далі, перша з формул (2.37) дає при заміні  $t$  на  $-t$ :

$$sn(2K - t) = -sn(-t) = sn(t)$$

Порівнюючи  $sn(2K + t)$  і  $sn(2K - t)$  отримаємо:

$$sn(2K + t) = -sn(2K - t)$$

Це значить, що графік  $y = sn(t, k)$  симетричний відносно точки  $(2K, 0)$  і отже в інтервалі  $0 \leq t \leq 4K$  має такий самий вигляд як хвиля синусоїди в інтервалі  $0 \leq t \leq 2\pi$  (рис.2.14,а). Далі побудова графіку проводиться основуючись на періодичності  $sn(t, k)$  (період дорівнює  $4K$ ).

Для визначення характеру графіка функції  $y = cn(t, k)$ , можна відштовхуватись від співвідношення  $cn(t, k) = \sqrt{1 - sn^2(t, k)}$ , з якого випливає, що в інтервалі  $0 \leq t \leq K$ , ця функція монотонно спадає від 1 до 0. Далі графік будується так само як і вище з використанням формул (2.36), (2.37) і (2.38). Отримаємо, що цей графік має вигляд косинусоїди (рис.2.14,б).

Аналогічно отримаємо вигляд графіку функції  $y = dn(t, k)$ . Формула  $dn(t, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(t, k)}$ . Формула  $dn(t, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(t, k)}$  демонструє спочатку, що ця функція спадає від 1 до  $\sqrt{1 - k^2} = k'$  в інтервалі  $0 \leq t \leq K$ . Продовження графіку на всю існуючу вісь здійснюється за допомогою співвідношень (2.36) і (2.37). Побудований графік зображений на рис.(2.14,в).

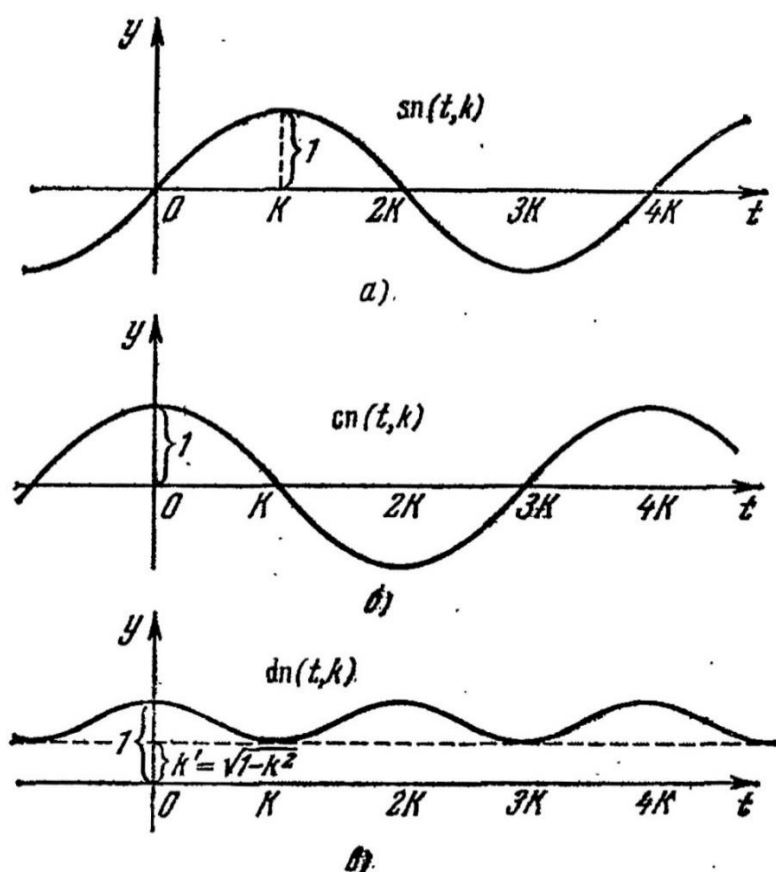


Рисунок 2.14 – Функції Якобі при  $t \in [0; K(k)]$ , де  $K(k) = \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}}$  і  $k \in [0; 1]$

З приведенного аналізу випливає, що всі дійсні нулі  $sn(t, k)$  (тобто дійсні корні рівняння  $sn(t, k) = 0$ ) вичерпуються точками:  $t = 2mK(k)$ , де  $m$  – будь-яке ціле число.

Аналогічно дійсні нулі  $cn(t, k)$  мають вигляд:

$$t = (2m-1)K(k)$$

Що стосується функції  $dn(t, k)$  то вона зовсім не має дійсних нулів (якщо  $0 \leq t \leq K$ ). Аналогічним чином знаходять полюси функцій Якобі. Почнемо з  $sn(t, k)$  ( $0 \leq k \leq 1$ ). Знаменник формули (2.27) має вигляд:

$$cn^2(\tau, k') + k^2 sn^2(\sigma, k) sn^2(\tau, k') \quad (2.39)$$

Так як при дійсних  $\sigma$  і  $\tau$  значення функцій Якобі також дійсні, то умова приведення цієї суми в нуль еквівалентно двом умовам:

$$cn(\tau, k') = 0$$

$$sn^2(\sigma, k) sn^2(\tau, k') = 0$$

Але якщо  $cn(\tau, k') = 0$ , то  $sn(\tau, k') = \pm 1$  (див. 2.14). Тому отримуємо, що (2.39) стає нулем тоді і тільки тоді, коли одночасно виконується

$$\left. \begin{aligned} cn(\tau, k') &= 0 \\ sn(\sigma, k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Звідси випливає, що

$$\sigma = 2mK(k),$$

$$\tau = (2n-1)K(k'),$$

тобто  $t = 2mK(k) + i(2n-1)K(k')$ .

Позначивши  $K(k)$  через  $K$  і  $K(k')$  через  $K'$ , перепишемо знайденні значення у вигляді:

$$t = 2mK + i(2n-1)K', \quad (2.41)$$

де  $m$  і  $n$  – будь-які цілі числа.

Якщо підставити знайдені значення  $\sigma$  і  $\tau$  в формулу (2.27), то впевнимися, що не тільки знаменник, але і чисельник стане нулем (адже  $sn(\sigma, k) = cn(\tau, k') = 0$ ). Тому ця формула не дає можливості безпосередньо судити про поведінку  $sn(t, k)$  при  $t \rightarrow 2mK + (2n-1)iK'$ . На допомогу приходить формула (2.27'). Так як при  $cn(\tau, k') = 0$  значення  $sn(\tau, k') = \pm 1$  (перша з формул (2.14)), то  $sn^2(\tau, k') = 1$  і формула (2.27') показує, що  $sn(t, k) \rightarrow \infty$ , коли  $t$  прямує до якої-небудь із точок (2.41). Отже,

знайдені значення  $t$  представляють полюси (і при цьому всі можливі) функції Якобі  $sn(t, k)$ .

Аналогічним шляхом можна впевнитись, що значення (2.41) дають також всі полюси функцій  $cn(t, k)$  і  $dn(t, k)$ . Втім, та обставина, що полюси цих функцій повинні співпадати з полюсами  $sn(t, k)$  виходить з рівності (2.14).

Для знаходження нулів  $sn(t, k)$  зручна формула (2.27'). З неї випливає, що для перетворення  $sn(\sigma + i\tau, k)$  в нуль необхідним є умова:

$$sn^2(\sigma, k)cn^2(\tau, k') + sn^2(\tau, k') = 0,$$

тобто два рівняння:

$$\begin{aligned} sn(\sigma, k)cn(\tau, k') &= 0 \\ sn(\tau, k') &= 0 \end{aligned}$$

Але із останнього рівняння виходить за допомогою (2.14), що  $cn(\tau, k') = \pm 1 \neq 0$ ; тому необхідні умови перетворення  $sn(\sigma + i\tau)$  в нуль приймаю вигляд:

$$\left. \begin{aligned} sn(\sigma, k) &= 0 \\ sn(\tau, k') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Звідси:

$$\sigma = 2mK(k), \quad \tau = 2niK(k'),$$

тобто

$$t = 2mK + 2niK', \quad (2.43)$$

де  $m$  і  $n$  – будь-які цілі числа.

Але формула (2.27') виявляється непридатною для розрахунку  $sn(t, k)$  в знайдених точках, так як при умові (2.42) не тільки чисельник, але і знаменник дробу, що представляє  $sn(t, k)$ , рівний нулю. Тому звернемось до

формули (2.27). Тут чисельник рівний нулю, проте знаменник відрізняється від нуля (пригадаємо, що  $cn(\tau, k') = \pm 1$ ). Отже, формула (2.43) відображає нулі  $sn(t, k)$  (і при цьому всі). Формула:

$$t = (2m - 1)K + 2niK' \quad (2.44)$$

дає всі нулі  $cn(t, k)$ , а з допомогою:

$$t = (2m - 1)K + 2(n - 1)iK' \quad (2.45)$$

дає всі нулі  $dn(t, k)$  ( $m$  і  $n$  приймають всі можливі значення). Можна провести аналіз для функцій Якобі. Розглянемо, наприклад,  $sn(t, k)$ .

Вище було показано, що:

$$sn(t + 2K) = -sn(t),$$

звідки випливає, що:

$$sn(t + 4K) = sn(t),$$

тобто, що  $4K$  є періодом  $sn(t)$  (дійсний). Покажемо, що  $sn(t)$  має також уявні періоди. Із формули (2.42), що дає всі нулі  $sn(t, k)$ , бачимо, що  $t = 2iK'$  також є нулем, тобто:

$$sn(2iK', k) = 0 \quad (2.45)$$

Далі із формул (2.22) і (2.23) отримаємо при  $t = 2K'$ :

$$cn(2iK', k) = \frac{1}{cn(2K', k')}, \quad dn(2iK', k) = \frac{dn(2K', k')}{cn(2K', k')} \quad (2.46)$$

Але з формул (2.37) випливає, що при  $t=0$ :

$$cn(2K, k) = -cn(0) = -1, \quad dn(2K, k) = dn(0) = 1,$$

або змінюючи  $k$  на  $k'$  а отже і  $K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$  на

$$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} :$$

$$cn(2K', k') = -1, \quad dn(2K', k') = 1.$$

Тому формули (2.46) дають:

$$cn(2iK', k) = -1, \quad dn(2iK', k) = -1 \quad (2.47)$$

Поклавши в першому із виразів (2.24)  $\alpha = t$  і  $\beta = 2iK'$ , отримаємо за допомогою (2.45) і (2.47):

$$sn(t + 2iK', k) = sn(t, k)cn(2iK', k)dn(2iK', k) = sn(t, k) \quad (2.48)$$

звідки випливає, що  $2iK'$  є періодом  $sn(t, k)$ .

Із сказаного в цьому пункті випливає, що:

$$A = 4Km + 2iK'n, \quad (2.49)$$

де  $m$  і  $n$  – будь-які цілі числа, є періодом  $sn(t, k)$ . Покажемо, що числами (2.49) вичерпуються всі можливі періоди  $sn(t, k)$ . Нехай  $A$  – який-небудь період  $sn(t, k)$ . Тоді:

$$sn(t + A) = sn(t) \quad (2.50)$$

Вважаючи тут  $t = 0$ , знайдемо:

$$sn(A) = 0,$$

тобто  $A$  є нулем функції  $sn(t)$ ; тому (див. 2.42):

$$A = 2mK + 2iK'n,$$

де  $m$  і  $n$  – деякі цілі числа. Позначимо частку при діленні  $m$  на 2 через  $r$ :

$$m = 2p + r,$$

( $p$  – ціле число,  $r = 0$  або  $1$ ). Тоді:

$$A = 4pK + 2niK' + 2rK.$$

Підставляючи в (2.50) і відмічаючи, що  $4pK \pm 2niK'$  є періодом, знайдемо:

$$sn(t + 2rK) = sn(t).$$

Це співвідношення не може тотожно виконуватись, якщо  $r = 1$ , так як  $sn(t + 2K) = -sn(t)$ , тому  $r = 0$ ,

$$A = 4pK + 2niK',$$

що і потрібно було довести.

З доведеного випливає вище, що  $sn(t, k)$  – двояко періодична функція за основні періоди якої можна прийняти  $4K$  і  $2iK'$ . Аналогічно можна довести, що  $cn(t, k)$  – двояко періодична функція з основними періодами  $4K$  і  $2K + 2iK'$  (зручно також прийняти за основні періоди  $cn(t, k)$  числа  $2K - 2iK'$  і  $2K + 2iK'$ ), а  $dn(t, k)$  – також двояко періодична функція з основними періодами  $2K$  і  $4iK'$ . При цьому можна було б впевнитись, що для будь-якого  $A$  кожне з рівнянь вигляду:

$$sn(t, k) = A, \quad cn(t, k) = A, \quad dn(t, k) = A$$

має два і тільки два корені (вони можуть зливатись в один кратний корінь) у відповідному паралелограмі періодів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Прасолов В.В. Эллиптические функции и алгебраические уравнения [Текст] / В.В.Прасолов, Ю.П.Соловьев. – М.: «Факториал»,1997. – 288с.Библиогр.: с.282 – 286. – Предм.указ.: с.287 – 288. – ISBN 5 -88688 – 018 – 6.
2. Маркушевич А. И. Замечательные синусы. Введение в теорию эллиптических функций. [Текст] / А.И.Маркушевич. – 2-е изд.,–М.: «Наука», 1974. – 95с.
3. Справочник по специальным функциям [Текст]: [пер. с англ.] / Под ред. Абромовица М., Стиган И. – М.: «Наука», 1979. – 832с. – Библиогр.: по главам. – Предм.указ.: с.817 – 826. – Обозн.: с.827 – 830. – Перевод изд.: Handbook of mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables./ Edited by M.Abramowitz and I.A.Stegun. National bureau of standards. Applied Mathematical series \* 55. 1964.
4. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций [Текст]/ Н.И.Ахиезер. – 2-е изд.переработ. – М.: «Наука» Главная редакция физико-математической, 1970. – 304с. – Библиогр.:с.304.
5. Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы.[Текст]:[пер.с англ.]/ Н.Коблиц. – М.: «Мир», 1988. – 320с. – Библиогр.: с.306 – 310. – имен.указ.: с.311 – 312. – Предм.указ.:с.313. – 316. – Перевод изд.: Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms./N.Koblitz. Springer – Verlag. N.Y.,Berlin, Tokyo. 1984.
6. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. [Текст]: [перевод с англ.] / В.Каннингхэм. – М.-Л.: Гос.энергоиздат.,1962. – 458с. – Библиогр.: с.448 – 456. – Перевод изд.: INTRODUCTION to NONLINEAR ANALYSIS / W.J.Cunningham. McGraw-Hill Book Co. Inc. N.Y.,1958.



7. Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа. Ч.II. Трансцендентные функции. [Текст]: [ перевод с англ.] / Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон.– Изд.второе. – М.: Гос.изд.физ.-мат.лит., 1963. – 508с. – Библиогр.:по главам.– Именнойуказ.: с.495 – 499. – Предм.указ.: с.500 – 508. – Перевод изд.: A COURSE of MODERN ANALYSIS. An Introduction to the General Theory of Infinite Processes and of Analytic Functions; with an Account of the Principal Transcendental Functions./by E.T.WHITTAKER, G.N.WATSON. Fourth edition. Cambridge. An the University Press. 1927.
8. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе. [Текст]: [ перевод с англ.] / Г.Бейтмен, А.Эрдейи.–М.: «Наука»,1967. – 300с.– (Серия: «Справочная математическая библиотека»).– Библиогр.: с.278 - 290.– Именной указ.:с.291 – 292. – Предм.указ.: с.293 – 297.– Указ.важн.обозн.: с.298 – 299.– Перевод изд.: HIGHER TRANSCENDENTALFUNCTIONS.v.3. / Based, in part, on notes left by H.BATEMAN and compiled by staff of the Bateman manuscript project. / Director a. ERDELYI. N.Y., Toronto, London. MC Graw – Hill Book Company. INC. 1955.

## Додаток А

### Приклади конформних відображень

#### А.1

#### Інтеграл Шварца-Крістофеля

Інтеграл Шварца-Крістофеля:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= A \int_{z_0}^z (z - x_1)^{\alpha_1 - 1} \cdot (z - x_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n - 1} dz + B, \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j &= n - 2 \end{aligned} \right\}$$

відображає верхню півплощину  $y > 0$  конформно до внутрішності многокутника у  $\omega$ -площині; контур многокутника відповідає дійсній вісі, вершини  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  відповідають різним точкам вісі  $Ox$  і внутрішній кут многокутника у вершині  $\omega_j$  дорівнює  $\alpha_j \pi$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Для кожного даного многокутника у  $\omega$ -площині три з точок  $x_j$  можуть бути обрані довільно; інші точки та параметри  $A$  і  $B$  визначаються єдиним чином.

**Формула Крістофеля.** Нехай на площині маємо многокутник  $A_1 A_2 \dots A_n$  (рис. А.1), та покладемо, що величини кутів цього многокутника  $\alpha_1 \pi, \alpha_2 \pi, \dots, \alpha_n \pi$ .

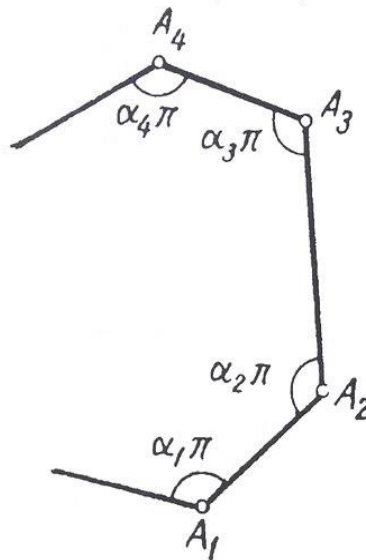
Введемо до розгляду функцію:

$$z = f(t), \tag{А.1}$$

котра виконує конформне перетворення верхньої напівплощини  $t$  у наш багатокутник. Нашою задачею буде побудова аналітичного виразу цієї функції. Покладемо, що вершинам багатокутника  $A_k$  відповідають точки:

$$t = a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

що лежать на дійсній вісі, при тому ми враховуємо, що всі ці точки знаходяться на кінцевій відстані, чого завжди можна досягти завдяки дробово-лінійного перетворення площини  $t$ . Окрім того, нехай  $a_1$  - крайня точка зліва та  $a_n$  - крайня точка справа. Розглянемо питання про аналітичне продовження функції  $f(t)$  через дійсну вісь. Візьмемо деякий певний



відрізок  $a_k a_{k+1}$  дійсної

Рисунок А.1 – Многокутник  $A_1 A_2 \dots A_n$  з кутами  $\alpha_1 \pi, \alpha_2 \pi, \dots, \alpha_n \pi$

вісі, котрому відповідає сторона багатокутника  $A_k A_{k+1}$ . У силу принципу симетрії ми можемо функцію  $f(t)$  аналітично продовжити через відрізок  $a_k a_{k+1}$ , і значення цього продовження у нижній півплощині дадуть новий багатокутник, котрий отримується з основного за допомогою відображення у стороні  $A_k A_{k+1}$ . Далі ми можемо аналітично продовжити наново отриману функцію із нижньої півплощини у верхню через деякий відрізок  $a_l a_{l+1}$

дійсної вісі. При цьому знов ж таки у силу принципу симетрії нові значення  $f(t)$  у верхній півплощині дадуть многокутник, що виходить з другого многокутника завдяки його відображенню на тій його стороні, що відповідала згаданому відрізку  $a_l a_{l+1}$  дійсної вісі и т. д. Таким чином бачимо, що можна без перешкод продовжувати нашу функцію  $f(t)$  через дійсну вісь, і при цьому значення цієї функції будуть перетворювати кожен півплощину у многокутник, котрий утворюється з основного шляхом декількох відображень у тих сторонах, які відповідають тим відрізкам дійсної вісі через які ми здійснювали аналітичне продовження. При цьому помітимо, що сторонімногокутника  $A_n A_1$  відповідає на дійсній вісі відрізок, що йде від  $a_n$  до  $\infty$  і потім від  $\infty$  до  $a_1$ , так що нескінченно далека точка у площині  $t$  відповідає деякій точці, що лежить на стороні  $A_n A_1$  многокутника. Самі точки  $a_k$  будуть, взагалі кажучи, особливими точками функції  $f(t)$ . Дослідимо характер цих особливих точок. Візьмемо для визначеності точку  $a_2$  і обійдемо навколо цієї точки, відправляючись з верхньої півплощини і знов туди повертаючись. При цьому нам спочатку потрібно пройти з верхньої півплощини в нижню через відрізок  $a_1 a_2$  і потім повернутись із нижньої у верхню через відрізок  $a_2 a_3$ . Згідно з вище сказаним, значення  $f(t)$  у нижній півплощині дадуть многокутник  $A_1 A_2 A'_3 \dots A'_n$ , котрий утворюється з основного відображенням у стороні  $A_1 A_2$ , і потім повернення у верхню півплощину зведеться до відображення у стороні  $A_2 A'_3$  цього нового багатокутника (рис. А.2).

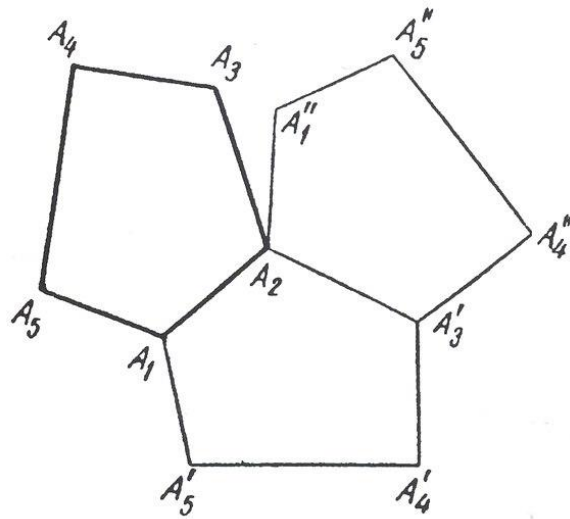


Рисунок А.2 – Утворення многокутника  $A_1A_2A_3...A_n$  шляхом відображення у сторонах основного многокутника

Таким чином, вище вказаному обходу навколо точки  $a_2$  буде відповідати на площині  $z$  відображення у прямих  $A_2A_1$  та  $A_2A_3$ , тобто, лінійне перетворення виду  $z' - b_2 = e^{i\varphi}(z - b_2)$ , де  $b_2$  - координата точки  $A_2$ .

Звідси безпосередньо виходить:

$$^*f(t) = e^{i\varphi}f(t) + \gamma,$$

де  $\gamma$  - деяка стала ( $\gamma = b_2 - e^{i\varphi}b_2$ ) та  $^*f(t)$  - нова гілка  $f(t)$  у верхній півплощині.

Звідси:

$$\frac{^*f''(t)}{^*f'(t)} = \frac{f''(t)}{f'(t)}, \quad (\text{A.2})$$

тобто, функція  $\frac{f''(t)}{f'(t)}$  буде регулярною і однозначною в околі точки  $a_2$ , і ця точка може для функції (А.2) бути полюсом або суттєво особливою точкою. Покажемо, що ця точка буде простим полюсом з вирахуванням  $(\alpha_2 - 1)$ . Дійсно, введемо замість  $z$  нову комплексну змінну  $z'$ :

$$z' = (z - b_2)^{\frac{1}{\alpha_2}}$$

де  $b_2$  - координата вершини  $A_2$ . Цій вершині буде відповідати значення  $z' = 0$  та сторони  $A_2A_1$  та  $A_2A_3$ , що утворюють кут  $\alpha_2\pi$ , перейдуть у дві прямі, що утворюють кут  $\pi$ , тобто на площині  $z'$  вищезгадані сторони будуть перетворені у два відрізки однієї ж і самої прямої  $l$ , що виходять з початку у різні сторони. Якщо ми звернемося тепер до площини змінної  $t$ , то побачимо, що окіл точки  $a_2$  що лежить над дійсною віссю, перейде на площині  $z'$  у окіл точки  $z' = 0$ , що лежить по одну сторону від прямої  $l$ . Усилу принципу симетрії те саме буде мати місце і для околів точок  $t = a_2$  та  $z' = 0$ , що лежать по іншу сторону від вище згаданих прямих. Таким чином, окіл точки  $t = a_2$  перейде в однолистий окіл точки  $z' = 0$ , і ми повинні будемо мати розклад виду

$$z' = (z - b_2)^{\frac{1}{\alpha_2}} = c_1(t - a_2) + c_2(t - a_2)^2 + \dots \quad (c_1 \neq 0).$$

Звідси безпосередньо виходить, що:

$$z' = b_2 + c_1^{\alpha_2}(t - a_2)^{\alpha_2} \left\{ 1 + \frac{c_2}{c_1}(t - a_2) + \frac{c_3}{c_1}(t - a_2)^2 + \dots \right\}^{\alpha_2}$$

або, якщо застосуємо формулу біному Ньютона:

$$f(t) = b_2 + (t - a_2)^{\alpha_2} f_1(t),$$

де  $f_1(t)$  - регулярна в точці  $t = a_2$  і відмінна там від нуля.

Звідси:

$$f'(t) = \alpha_2(t - a_2)^{\alpha_2-1} f_1(t) + (t - a_2)^{\alpha_2} f_1'(t),$$

$$f''(t) = \alpha_2(\alpha_2 - 1)(t - a_2)^{\alpha_2-2} f_1(t) + 2\alpha_2(t - a_2)^{\alpha_2-1} f_1'(t) + (t - a_2)^{\alpha_2} f_1''(t),$$

та, отже:

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{1}{t - a_2} \cdot \frac{\alpha_2(\alpha_2 - 1)(t - a_2)f_1(t) + 2\alpha_2(t - a_2)f_1'(t) + (t - a_2)^2 f_1''(t)}{\alpha_2 f_1(t) + (t - a_2)f_1'(t)}.$$

Другий множник справа є регулярна функція в точці  $t = a_2$ , і значення його в цій точці дорівнює  $(\alpha_2 - 1)$ , тобто поблизу точки  $t = a_0$  має місце розклад:

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{\alpha_2 - 1}{t - a_2} + P(t - a_2),$$

де  $P(t - a_2)$  є функція, регулярна в точці  $t = a_2$ .

Аналогічно ми переконуємося, що функція (А.2) має в кожній точці  $a_k$  дійсної вісі полюс 1-го порядку з вирахуванням  $(\alpha_k - 1)$ . Ніяких інших особливих точок на скінченій відстані наша функція, як ми знаємо, не має, а тому різниця:

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} - \sum_{s=1}^n \frac{\alpha_s - 1}{t - a_s} \quad (\text{А.3})$$

буде регулярною та однозначною функцією на всій площині. З'ясуємо тепер поведінку функції (а.3) на нескінченності. Як ми бачили вище, функція  $f(t)$  на нескінченності прямує до певного значення, а саме до координати  $b_\infty$  тієї точки сторони  $A_n A_1$ , котра відповідає  $t = \infty$ , та, отже, в околі нескінченно далекої точки маємо розклад виду:

$$f(t) = b_\infty + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \dots$$

Звідси безпосередньо виходить, що для функції  $\frac{f''(t)}{f'(t)}$  в околі нескінченності маємо розклад виду:

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{d_1}{t} + \frac{d_2}{t^2} + \dots,$$

тобто, ця функція прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Таким чином, функція (А.3), регулярна на всій площині, прямує до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , а отже, обмежена на всій площині. Згідно з теоремою Ліувіля, вираз (А.3) має бути величиною

сталою, так як ми тільки що бачили, що він має прямувати до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , то звідси виходить, що ця стала має дорівнювати нулю. Це приводить до рівності:

$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{\alpha_1 - 1}{t - a_1} + \frac{\alpha_2 - 1}{t - a_2} + \dots + \frac{\alpha_n - 1}{t - a_n}. \quad (\text{a.4})$$

Інтегруючи один раз, отримаємо

$$\ln f'(t) = (\alpha_1 - 1)\ln(t - a_1) + (\alpha_2 - 1)\ln(t - a_2) + \dots + (\alpha_n - 1)\ln(t - a_n) + C$$

або

$$f'(t) = A(t - a_1)^{\alpha_1 - 1}(t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1}$$

та, інтегруючи ще раз, маємо

$$z = f(t) = A \int_{t_0}^t (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} dt + B, \quad (\text{A.5})$$

де  $A$  та  $B$  – сталі. Таким чином, наша задача розв'язана та *конформне перетворення верхньої півплощини  $t$  у многокутник з кутами  $\alpha_k \pi$  дається формулою (A.5), де  $a_k$  – деякі точки на дійсній вісі, а  $A$  та  $B$  – комплексні сталі.*

Перш за все з'ясуємо роль цих останніх сталих. У попередніх роздумах ми використовували лише величини кутів нашого многокутника. Таким чином, піддаючи многокутник руху або навіть перетворенню подібності, ми не змінюємо кутів, та для нового многокутника також повинна мати місце формула (A.5). Роль сталих  $A$  та  $B$  зводиться до того, що ми при їх зміні переходимо від одного многокутника до подібного. Більш значимою є роль чисел  $a_k$  у формулі (A.5). Розташування цих чисел на дійсній вісі разом зі значенням сталої  $A$  дає довжини сторін многокутника. У подальшому ми ще звернемося до цього питання.

При виведенні формули (A.5) передбачалося, що усім вершинам многокутника відповідають точки дійсної вісі, що лежать на скінченій



відстані. Тепер покладемо, що одній з цих вершин, наприклад вершині  $A_n$ , відповідає нескінченно далека точка.

Здійснюючи, наприклад, у формулі (A.5) заміну змінної інтегрування  $t = -\frac{1}{t'} + a_n$  та користуючись співвідношенням

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2, \quad (\text{A.6})$$

легко показати, повертаючись до попередніх позначень, що в цьому випадку формула має вигляд

$$z = f(t) = A \int_{t_0}^t (t - a_1)^{\alpha_1-1} (t - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (t - a_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1} dt + B. \quad (\text{A.7})$$

За допомогою дробово-лінійної функції, що перетворює півплощину, у коло  $|\tau| < 1$ , можна показати, що конформне перетворення згаданого кола в багатокутник виражається формулою, яка по вигляду співпадає з (A.5):

$$z = f(\tau) = A \int_0^\tau (\tau - a_1')^{\alpha_1-1} (\tau - a_2')^{\alpha_2-1} \dots (\tau - a_n')^{\alpha_{n-1}-1} d\tau + B, \quad (\text{A.8})$$

де  $a_k' (k=1, \dots, n)$  - точки, що лежать на колі  $|\tau| = 1$ .

У вказаних вище формулах нижня границя не грає ролі та впливає лише на сталу B. Аргументи різниць  $t - a_k$  та  $t - a_k'$  треба фіксувати хоча б в одній точці одного з проміжків  $(a_k, a_{k+1})$ , вважаючи, наприклад,  $\arg(t - a_1) = 0$  при  $a_1 < t < a_2$ . При цьому вони визначаються на всій півплощині (або у всьому колі).

Зупинимося детально на випадку прямокутника. Покладемо, що вершини цього прямокутника B мають координати (рис. A.3):

$$-\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2, -\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2,$$

де  $\omega_1$  і  $\omega_2$  - задані дійсні додатні числа. Візьмемо праву половину цього прямокутника з вершинами:

$$0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2, i\omega_2$$

та покладемо, що вона конформно відображена на праву половину верхньої півплощини  $t$ , тобто на ту половину верхньої півплощини  $t$ , точки якої мають додатну дійсну частину. При цьому ми можемо враховувати, що вершинам  $0, \frac{\omega_1}{2}$  і  $i\omega_2$  відповідають точки  $0, 1$  та  $\infty$  контуру пригаданої правої частини верхньої півплощини. При цьому вершині  $\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$  буде відповідати деяка точка дійсної вісі, що лежить між точками  $1$  та  $\infty$ . Позначимо цю точку через  $\frac{1}{k}$ , де,  $0 < k < 1$ . У силу принципу симетрії лівій половині верхньої півплощини

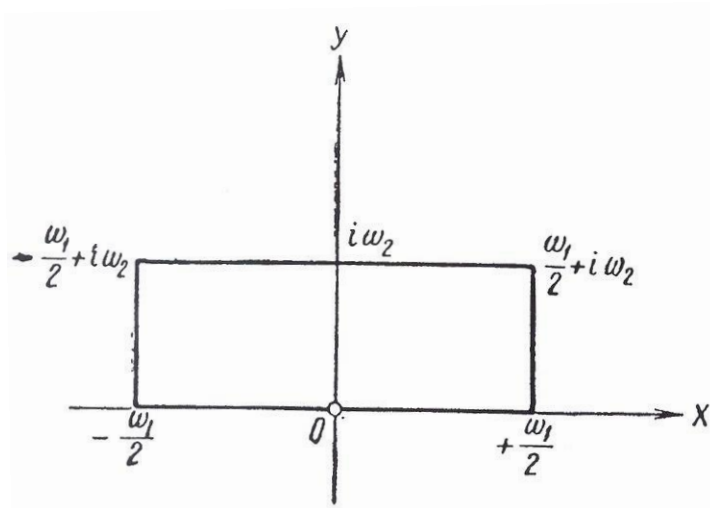


Рисунок III – Прямокутник, який необхідно перетворити

$t$ , при чому вершинам  $-\frac{\omega_1}{2}$ ,  $-\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$  будуть відповідати точки  $t = -1$  та  $t = -\frac{1}{k}$ . З попередніх міркувань безпосередньо виходить, що завжди можна таким чином нормувати наше конформне перетворення верхньої півплощини у прямокутник В, щоб точкам  $t = -1, 0, 1, \infty$  відповідали точки  $z = -\frac{\omega_1}{2}, 0, \frac{\omega_1}{2}, i\omega_2$ , і при цьому точкам  $t = \frac{1}{k}$  та  $t = -\frac{1}{k}$  будуть відповідати значення  $z = \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$  та  $z = -\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$ . Тепер можливо застосувати до нашого випадку формулу (а.5), вважаючи  $a_1 = -\frac{1}{k}; a_2 = -1; a_3 = 1; a_4 = \frac{1}{k}$  і  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}$ .

Ми отримуємо таким чином, приймаючи до уваги, що при  $t = 0$  і  $z = 0$ , формулу вигляду:

$$z = A \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(\frac{1}{k^2} - t^2\right)}}$$

або формулу вигляду:

$$z = A \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (\text{A.9})$$

При значеннях  $t$ , що лежать у середині відрізка  $-1 < t < 1$ , ми повинні мати відрізок дійсної вісі  $\left(-\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2}\right)$  у площині  $z$ . Звідси виходить, що у формулі (А.9) ми можемо вважати  $A$  додатною сталою і повинні брати радикал що дорівнює одиниці при  $t = 0$ . Подальші значення цього радикалу у

верхній півплощині отримуються єдиним шляхом, тому що цей радикал буде регулярною функцією в цій півплощині і не буде мати там точок розгалуження. Приймаючи до уваги, що вершинам  $\frac{\omega_1}{2}$  та  $\frac{\omega_1}{2} + i\omega_2$  відповідають значення  $t = 1$  та  $t = \frac{1}{k}$ , ми отримуємо наступні формули:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_1}{2} &= A \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \\ \omega_2 &= A \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.10})$$

Довжини сторін нашого прямокутника дорівнюють  $\omega_1$  та  $\omega_2$ , і можливо побудувати рівняння для визначення параметру  $k$ , що входить під знак інтегралу, знаючи відношення довжин сторін нашого прямокутника

$$\omega_1 : \omega_2 = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} : \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \quad (\text{A.11})$$

Визначивши звідси  $k$ , ми зможемо знайти  $A$  з одного з рівнянь (A.10).

Інтеграл, що входить до формули (A.9), не виражається через елементарні функції та називається еліптичним інтегралом першого роду у формі *Лежандра*. Далі будемо займатися такими інтегралами і не будемо зараз розбирати більш детально питання про визначення  $k$  з рівняння (A.11). Ми привели попередні міркування лише для того, щоб більш чіткіше з'ясувати питання про визначення сталих у формулі Крістофеля.

## А.2

### Конформне відображення прямокутника на півплощину.

Нехай в площині  $u$  дано прямокутник з вершинами в точках:

$$u = a, a+bi, -a+bi, -a,$$

де  $a, b$  - якісь додатні числа. Потрібно конформно відобразити цей прямокутник на верхню половину площини  $z$ . Як відомо з теорії функцій комплексного змінного, шукана відображаюча функція, поки мова йде про кінцеві точки, неперервна аж до границі.

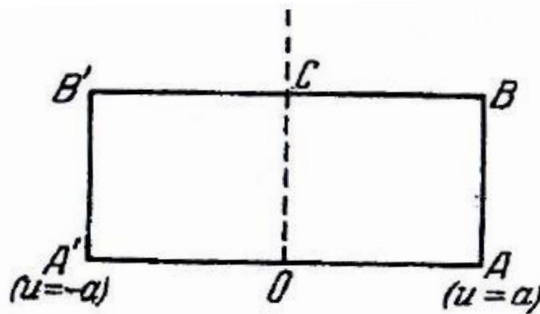


Рисунок А.4— Конформне відображення прямокутника на півплощину

Позначимо через  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) точки дійсної осі, які є образами вершин прямокутника. За формулою Шварца – Крістоффеля:

$$C' \cdot u + C'' = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(x-c_1) \cdot (x-c_2) \cdot (x-c_3) \cdot (x-c_4)}}.$$

На підставі загальних теорем відображаюча функція цілком визначиться, якщо задати образи трьох граничних точок прямокутника. Нехай точкам  $u = -a, 0, a$  (рис. А.4) відповідають точки  $z = -1, 0, 1$ . Цими вимогами визначаються три з констант, а саме, ми отримуємо  $C'' = 0, c_3 = -1, c_4 = 1$ . Таким чином:

$$C' \cdot u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1) \cdot (x - c_1) \cdot (x - c_2)}}. \quad (\text{A.12})$$

За принципом симетрії Рімана - Шварца функцію  $u$  можна аналітично продовжити через відрізок  $[-1, 1]$  дійсної осі площини  $z$ . Ми отримаємо прямокутник, симетричний даному відносно дійсної осі, і формула (A.12) дає відображення на цей прямокутник нижній півплощині. Це ж відображення ми отримаємо, якщо в (A.13) замінимо  $u$  на  $-u$ , а  $z$  на  $-z$ .

$$-C' \cdot u = \int_0^{-z} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1) \cdot (x - c_1) \cdot (x - c_2)}} \rightarrow C' \cdot u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1) \cdot (x + c_1) \cdot (x + c_2)}}. \quad (A.13)$$

В силу єдиності відображаючої функції при прийнятій відповідності трьох граничних точок функція (a.13) повинна бути тотожна з (A.13), звідки випливає, що  $(x - c_1) \cdot (x - c_2) = (x + c_1) \cdot (x + c_2) \rightarrow c_2 = -c_1$ .

Замінюючи  $c_1$  на  $1/k$ , де  $k$  можна вважати додатним і меншим одиниці, представимо відображаючу функцію у вигляді:

$$u = \frac{1}{C} \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2) \cdot (1 - k^2 \cdot x^2)}}. \quad (A.14)$$

Залишилось два параметри:  $C$  та  $k$ . Для їх визначення маємо рівняння:

$$a = \frac{1}{C} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2) \cdot (1 - k^2 \cdot x^2)}}, \quad (A.15')$$

$$bi = \frac{i}{C} \int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1) \cdot (1 - k^2 \cdot x^2)}}. \quad (A.15'')$$

Для визначення  $k$  розділимо друге рівняння на перше:

$$\frac{b}{a} = \frac{\int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1) \cdot (1-k^2 \cdot x^2)}}}{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2 \cdot x^2)}}}. \quad (\text{A.15})$$

Якщо  $k$  визначено, то  $C$  може бути знайдене з рівнянь (A.15') або (A.15'').

Розглянемо більш детально рівняння (A.15), прийнявши  $k^2 \cdot x^2 + k^2 \cdot y^2 = 1$ , а також, що  $0 \leq y \leq 1$  чи  $1/k \geq x \geq 1$ . З цього випливає:

$$\frac{k' \cdot dy}{\sqrt{1-k'^2 \cdot y^2}} = -\frac{k \cdot dx}{\sqrt{1-k^2 \cdot x^2}}.$$

Так як  $k \cdot \sqrt{x^2-1} = k' \cdot \sqrt{1-y^2}$ , то:

$$\int_1^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1) \cdot (1-k^2 \cdot x^2)}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2) \cdot (1-k'^2 \cdot y^2)}}.$$

Таким чином, рівняння (A.15) прийме вигляд:

$$\frac{b}{a} = \frac{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k'^2 \cdot x^2)}}}{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2 \cdot x^2)}}}.$$

Праворуч ми маємо відношення повних еліптичних інтегралів першого роду  $K'$ ,  $K$  для модулів  $k'$  та  $k$ . Коли  $k$  збільшується від 0 до 1, права частина, змінюється монотонно від  $\infty$  до 0. Звідси видно, що для будь-якого значення відношення  $b/a$  існує таке  $k$  з інтервалу (0, 1), яке задовольняє рівнянню (A.15). Відображає функція  $\epsilon$ :

$$u = \frac{a}{K} \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2 \cdot x^2)}}.$$

Цей же результат можна було б отримати, відштовхуючись від функції  $z = \text{sn}(\frac{K \cdot u}{a}; k)$  і розглядаючи її дійсні значення. Нехай точка  $u$  рухається в

додатному напрямку по межі прямокутника, починаючи від положення  $u = 0$ . Цьому положенню відповідає  $z = 0$ . Коли  $u$  збільшується від значення 0 до значення  $a$ , величина  $z$  зростатиме від 0 до 1. Перейдемо до сторони АВ нашого прямокутника. На цій стороні  $u = a + iv$ , де  $v$  змінюється від 0 до  $b$ . Враховуючи:

$$\operatorname{sn}(K + i\omega; k) = \frac{\operatorname{cn}(i\omega; k)}{\operatorname{dn}(i\omega; k)} = \frac{1}{\operatorname{dn}(\omega; k')},$$

то на стороні АВ:

$$z = \frac{1}{\operatorname{dn}(Kv/a; k')},$$

де  $v$  змінюється від 0 до  $b$  і, значить,  $z$  збільшується від 1 до  $1/\operatorname{dn}(K'; k') = 1/k$ .

Перейдемо до ділянки ВС, на якій  $u = v + ib$ , де  $v$  змінюється від  $a$  до 0. Так як:

$$z = \operatorname{sn}(iK' + \frac{Kv}{a}; k) = \frac{1}{k \cdot \operatorname{sn}(Kv/a; k)},$$

то  $z$  буде змінюватися від  $1/k$  до  $\infty$ .

Можна побачити, що правій половині ОАВС границі прямокутника відповідає права половина дійсній вісі площини  $z$ . Те, що лівій половині границі прямокутника буде відповідати ліва половина дійсної вісі, вже не потребує особливого доказу.

Оскільки функція  $z = \operatorname{sn}(\frac{K \cdot u}{a}; k)$  регулярна усередині прямокутника і його межі відображаються взаємно однозначно на дійсну вісь, то функція відображає прямокутник на півплощину.

Незалежний від теорії еліптичних функцій шлях, яким ми прийшли до відображаючої функції, цікавий тому, що він дозволяє для нормального випадку ( $0 < k < 1$ ) ввести основну еліптичну функцію Якобі і виявити її найголовніші властивості.



Прийmemo для простоти, що  $a = K i$ , отже,  $b = K'$ . Ми маемо функцію:

$$u = f(z) \equiv \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (1-k^2 \cdot x^2)}}, \quad (\text{A.16})$$

яка конформно відображає верхню половину площини  $z$  на прямокутник  $R$  площини  $u$  (рис.А.5). Будемо тепер аналітично продовжувати функцію  $u$  за принципом симетрії Рімана - Шварца. Насамперед можливо продовжити нашу функцію через відрізок  $[-1, 1]$  на нижню половину площини  $z$ . У площині  $u$  ми отримаємо прямокутник  $R^{-1}$ . Подальше продовження зробимо через відрізок  $[-1/k, -1]$ , якому відповідає сторона IV прямокутника  $R^{-1}$ . Ми отримаємо знову верхню половину площини  $z$ , а в площині  $u$  отримаємо прямокутник  $R_{-1}^{-1}$ .

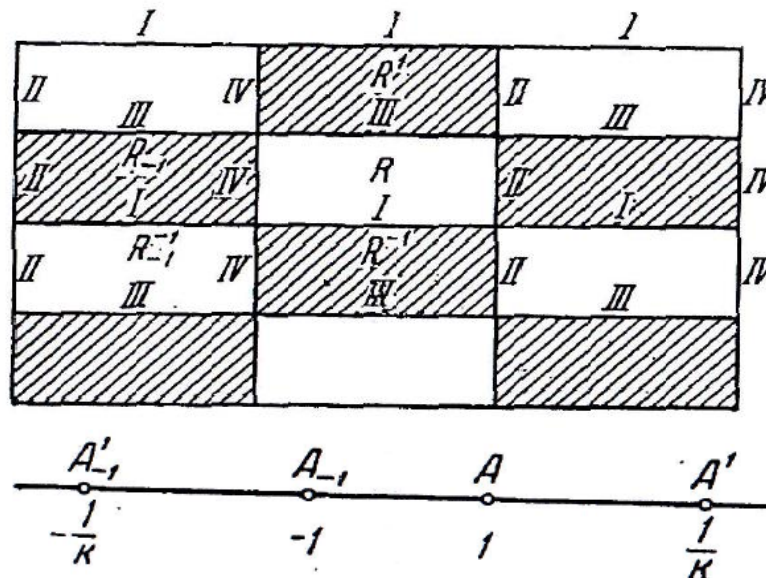


Рисунок А.5—Конформне відображення верхньої (незаштриховані прямокутники) і нижньої (заштриховані прямокутники) половини площини  $z$  на площини  $u$

Продовжуючи через відрізок  $[-1, 1]$ , який приведе нас до прямокутника  $R_{-1}$ , який є відображенням нижньої півплощини. Продовжуючи цей процес, ми будемо отримувати все нові і нові прямокутники, які в межі покривають всю

площину  $u$ . Кожен незаштрихований прямокутник є відображенням верхньої половини площини  $z$ , а кожен заштрихований прямокутник – нижньої.

Так як прямокутники в площині  $u$  не перекриваються, то кожному значенню  $u$  відповідає визначене значення  $z$ , тобто  $z$  є однозначна функція від  $u$ . Аналітичність цієї функції нам відома заздалегідь. Єдиними полюсами функції  $z = g(u)$  є точки  $iK' + 2mK + 2inK'$ , де  $m, n$  - цілі числа.

Довести, що ці точки - прості полюси, також легко на підставі властивостей відображаючої функції. Візьмемо прямокутник, складений з  $R$  і  $R'$ . Він відображається на всю площину  $z$ , розрізану вздовж відрізка  $\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$ .

Нескінченно далека точка є внутрішня точка цієї області  $z$ -площини. Їй відповідає точка  $u = iK'$ , що лежить на відрізку III. У цій точці функція  $z = g(u)$  мала полюс більш високого порядку, то простому обходу навколо точки  $u = iK'$  відповідав би в площині  $z$  кратний обхід навколо точки  $u = iK'$ , що неможливо в силу одно-однозначності конформного відображення.

Отже, наше твердження доведено.

Періодичність функції  $z = g(u)$  доводиться дуже просто. Дійсно, взявши в прямокутнику  $R$  (рис. А.6) довільну точку  $v$ , знайдемо точку  $v'$ , симетричну  $v$  відносно сторони II, а потім точку  $v''$ , симетричну  $v$  відносно сторони IV. В точках  $v', v''$  функція  $g(u)$  має однакові значення:  $g(v'') = g(v')$ . Разом з тим легко бачити, що  $v' - v''$  дорівнює подвоєній довжині відрізка I, тобто дорівнює  $4K$ . Аналогічно доводиться, що другим періодом є  $2iK'$ .

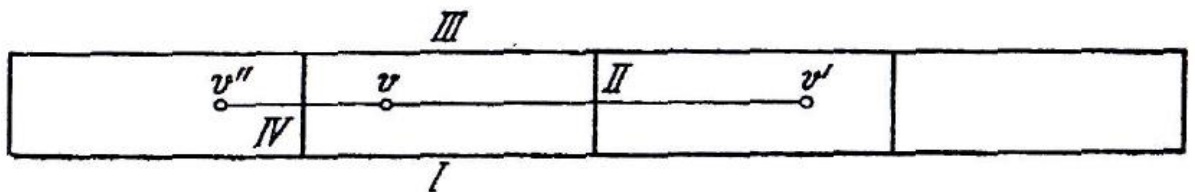


Рисунок А.6 -- Періодичність функції  $z = g(u)$

Таким чином, основні властивості функції  $z = \operatorname{sn}(u; k)$ , тобто верхньої межі, як функції від значення інтеграла, перевірені.

Розглянемо ще ту область, на яку функція  $z = \operatorname{sn}(u; k)$  відображає не один прямокутник, наприклад  $R$ , і не пару суміжних прямокутників, а всю площину комплексної змінної  $u$ . Кожному прямокутнику сімейства відповідає півплощина: незаштрихованим - верхня, а заштрихованим - нижня (рис. А.7). Так як прямокутників незліченна безліч, то приготуємо незліченну безліч півплощин (заштрихованих і незаштригованих) і розташуємо їх так, щоб незаштриговані і заштриговані примикали один до одного вздовж дійсної осі і щоб точки всіх площин, що мають однакові координати, лежали одна під іншою.

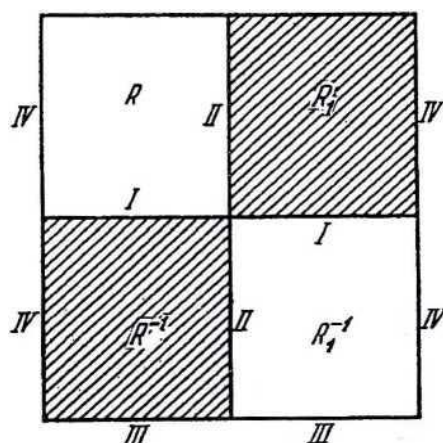


Рисунок А.7 – Сімейство прямокутників площини  $u$ , утворених конформним відображенням верхньої і нижньої півплощини  $z$ ; незаштригованим прямокутникам відповідає верхня півплощина, а заштригованим - нижня

Бажаючи отримати повну  $u$ -площину, ми повинні зробити зшивання прямокутників уздовж певних сторін. Відрізки границь півплощин, які відповідають прямокутникам, що зшиваються, при цьому також доведеться зшити. В результаті ми отримаємо над площиною  $z$  нескінченнолистову

ріманову поверхню, яка і є образом нашої площини  $u$ , отриманим за допомогою функції  $z = \operatorname{sn}(u; k)$ .

Для вивчення еліптичних функцій з періодами  $4K, 2iK'$  досить оперувати з чотирма прямокутниками розглянутого сімейства:  $R, R^{-1}, R_1$ , (рис. А.7 і А.8). Парі прямокутників  $R, R^{-1}$  відповідає пара позначених тими ж буквами півплощин. Зшиваючи прямокутники  $R, R^{-1}$  уздовж I, ми повинні зшити зазначені півплощини вздовж відрізка  $[-1, 1]$ . Отримаємо площину з розрізами вздовж піввісей  $(-\infty, -1), (1, \infty)$ . Зшиваючи  $R_1, R_1^{-1}$  уздовж I, отримаємо площину з розрізами вздовж тих же піввісей  $(-\infty, -1), (1, \infty)$ . Зшиємо тепер подвійні прямокутники уздовж II, а також уздовж IV. Аналогічне зшивання ми зробимо з площиною. При цьому для отримання безперервності відповідності верхній берег розрізу  $\left(1, \frac{1}{k}\right)$  верхнього листа підлягає зшиванню з нижнім берегом відповідного розрізу нижнього листа. Те ж саме матимемо і для розрізу  $\left(-\frac{1}{k}, -1\right)$ . В результаті отримаємо двохлистову поверхню Рімана з лініями переходу вздовж відрізків  $\left(-\frac{1}{k}, -1\right)$  і  $\left(1, \frac{1}{k}\right)$  і з розрізами вздовж  $\left(-\infty, -\frac{1}{k}\right)$  і  $\left(\frac{1}{k}, \infty\right)$ .

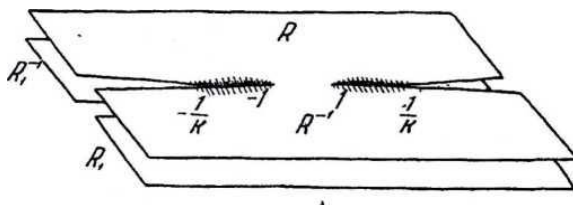


Рисунок VIII – Результат зшивання прямокутників Зшиваючи  $R_1, R_1^{-1}$  уздовж I

Після зшивання прямокутників виходить циліндрична поверхня (рис. А.9а). У протилежних точках сторін III подвійних прямокутників  $z$  - площини функція  $z = g(u)$  приймає однакові значення. Ці сторони тому належить зшити. Переходячи до циліндра, ми повинні його деформувати і зшити його межі. Ми отримаємо тор (рис. А.9б).

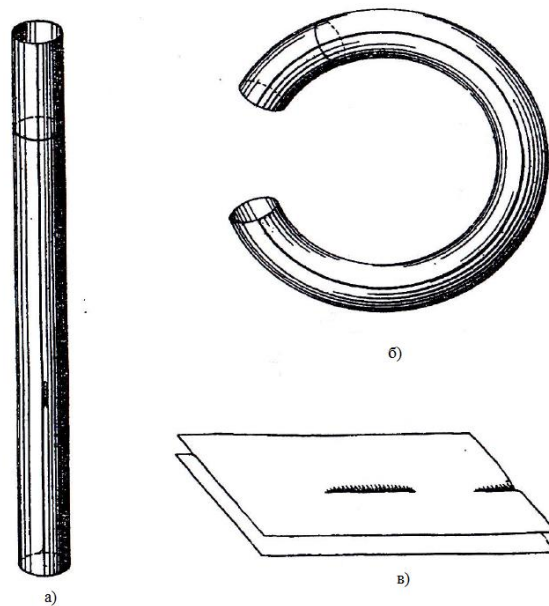
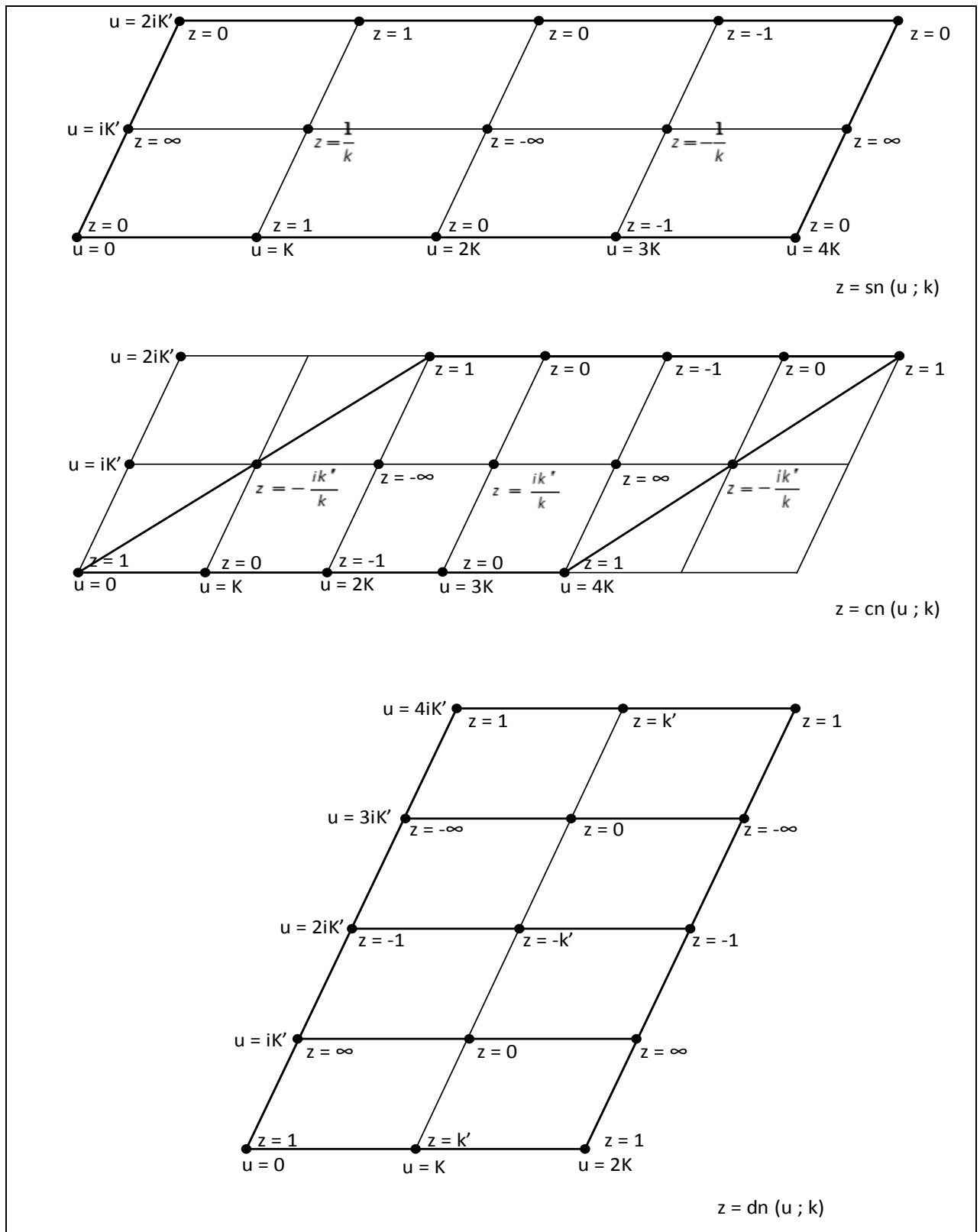


Рисунок А.9 – Утворення циліндричної поверхні в результаті зшивання прямокутників

Відповідне зшивання ми повинні зробити з листами ріманової поверхні. Тут доведеться зшивати напівлисти однієї і тієї ж площини. У результаті ми отримаємо двохлистову ріманову поверхню (рис.А.9в). Ця поверхня вже не має розрізів. У неї чотири точки розгалуження і дві лінії переходу.

Додаток Б  
Таблиці найважливіших формул



Таблиця Б.1 – Деякі значення функцій Якобі

Таблиця Б.2 – Диференціювання функцій Якобі. Теореми додавання

$z = snu$	$z'^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$
$z = cnu$	$z'^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 + k^2 z^2)$
$z = dnu$	$z'^2 = (1 - z^2)(z^2 - 1 + k^2)$
$\frac{d}{du} snu = cnu \, dnu$ $\frac{d}{du} cnu = -snu \, dnu$ $\frac{d}{du} dnu = -k^2 snu \, cnu$	
$sn(u + v) = \frac{snu \, cnv \, dnv + snv \, cnu \, dnu}{1 - k^2 sn^2 u \, sn^2 v}$ $cn(u + v) = \frac{cnu \, cnv - snu \, dnu \, snv \, dnv}{1 - k^2 sn^2 u \, sn^2 v}$ $dn(u + v) = \frac{dnu \, dnv - k^2 snu \, cnu \, snv \, cnv}{1 - k^2 sn^2 u \, sn^2 v}$	
$sn(u + v) sn(u - v) = \frac{sn^2 u - sn^2 v}{1 - k^2 sn^2 u \, sn^2 v}$ $cn(u + v) cn(u - v) = \frac{cn^2 v - dn^2 v \, sn^2 u}{1 - k^2 sn^2 u \, sn^2 v}$ $dn(u + v) dn(u - v) = \frac{dn^2 v - k^2 cn^2 v \, sn^2 u}{1 - k^2 sn^2 u \, sn^2 v}$	

Таблиця Б.3 – Деякі значення функцій Якобі



$\operatorname{sn} \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}$ $\operatorname{cn} \frac{K}{2} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$ $\operatorname{dn} \frac{K}{2} = \sqrt{k'}$
$\operatorname{sn} \frac{iK'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}}$ $\operatorname{cn} \frac{iK'}{2} = \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$ $\operatorname{dn} \frac{iK'}{2} = \sqrt{1+k}$
$\operatorname{sn} \frac{K+iK'}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}}(\sqrt{1+k} + i\sqrt{1-k})$ $\operatorname{cn} \frac{K+iK'}{2} = \frac{\sqrt{k'}(1-i)}{\sqrt{2}\sqrt{k}}$ $\operatorname{dn} \frac{K+iK'}{2} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+k'} - i\sqrt{1-k'})$
У нормальному випадку ( $0 < k < 1$ ) усі корені арифметичні

Таблиця Б.4 – Еліптичні інтеграли 1-го і 2-го роду

Якщо точки $e_1, e_2, e_3$ лежать на одній прямій, то $e_2$ означає середню з цих точок	
$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$	$k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$
$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$	$K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$

Продовження таблиці Б.4

$E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt$	$E' = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k'^2 t^2}{1-t^2}} dt$
Інтеграл береться по прямолінійному шляху з додатнім обходом по малому півколу точки $t = 1/ k $ , якщо $1 < k^2 < \infty$ (відповідно точки $t = 1/ k' $ , якщо $1 < k'^2 < \infty$ ). У нормальному випадку ( $0 < k < 1$ ) усі інтеграли додатні.	
$\eta_1 = \sqrt{e_1 - e_3} \left\{ E - \frac{e_1}{e_1 - e_3} K \right\}$	$\eta_3 = -i \sqrt{e_1 - e_3} \left\{ E' + \frac{e_3}{e_1 - e_3} K' \right\}$
$EK' + E'K - KK' = \frac{1}{2} \pi$	
$\omega_1 = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}$	$\omega_3 = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}$
$\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} u; k)$ $\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \operatorname{cn}(\sqrt{e_1 - e_3} u; k) \quad \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \operatorname{dn}(\sqrt{e_1 - e_3} u; k)$	
$E(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 v \, dv$	$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K} u = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$
$\int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} = u Z'(0) - \frac{H'(u)}{H(u)} \int \frac{du}{\operatorname{cn}^2 u} = \frac{u}{k'^2} Z'(K) - \frac{1}{k'^2} \frac{H_1'(u)}{H_1(u)}$ $\int \frac{du}{\operatorname{dn}^2 u} = \frac{u}{k'^2} \frac{E}{K} + \frac{1}{k'^2} \frac{\Theta_1'(u)}{\Theta_1(u)}$	

Таблиця Б.5 – Деякі інтеграли

$\int snu \, du = -\frac{1}{k} \ln(dnu + k cnu)$ $\int cnu \, du = \frac{i}{k} \ln(dnu - ik snu)$ $\int dnu \, du = i \ln(cnu - i snu)$
$\int \frac{du}{snu} = \ln \frac{dnu - cnu}{snu}$ $\int \frac{du}{cnu} = \frac{1}{k'} \ln \frac{dnu + k' snu}{cnu}$ $\int \frac{du}{dnu} = \frac{1}{ik'} \ln \frac{cnu + ik' snu}{dnu}$
$\int \frac{snu}{cnu} du = \frac{1}{k'} \ln \frac{dnu + k'}{cnu}$ $\int \frac{cnu}{dnu} du = -\frac{1}{k'} \ln \frac{1 - k snu}{dnu}$ $\int \frac{dnu}{snu} du = \ln \frac{1 - cnu}{snu}$ $\int \frac{snu}{dnu} du = \frac{i}{kk'} \ln \frac{ik' - k cnu}{dnu}$ $\int \frac{cnu}{snu} du = \ln \frac{1 - dnu}{snu}$ $\int \frac{dnu}{cnu} du = \ln \frac{1 + snu}{cnu}$
$\int \frac{snu}{cn^2 u} du = \frac{1}{k'^2} \frac{dnu}{cnu}$ $\int \frac{snu}{dn^2 u} du = -\frac{1}{k'^2} \frac{cnu}{dnu}$ $\int \frac{cnu}{sn^2 u} du = -\frac{dnu}{snu}$

Продовження таблиці Б.5

$\int \frac{cnu}{dn^2 u} du = \frac{snu}{dnu}$ $\int \frac{dnu}{sn^2 u} du = -\frac{cnu}{snu}$ $\int \frac{dnu}{cn^2 u} du = \frac{snu}{cnu}$
---

Таблиця Б.6 – Обчислення еліптичних інтегралів у дійсному випадку

$\int R(x, y) dx$	
I	$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)} \quad a^2 > b^2$ $k^2 = \frac{b^2}{a^2} \quad x = \begin{cases} b snu & (x^2 < b^2) \\ \frac{a}{snu} & (x^2 > a^2) \end{cases}$
II	$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)} \quad a^2 > b^2 \quad b^2 < x^2 < a^2$ $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad x = a dnu$
III	$y = \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 + x^2)} \quad x^2 < a^2$ $k^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \quad x = a cnu$
IV	$y = \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 + x^2)} \quad x^2 > a^2$ $k^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \quad x = \frac{a}{cnu}$
V	$y = \sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} \quad a^2 > b^2$ $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad x = a \frac{cnu}{snu}$